



Application de méthodes probabilistes à l'analyse des couplages en Compatibilité électromagnétique et contribution à la sûreté de fonctionnement de systèmes électroniques

Fatou Diouf

► To cite this version:

Fatou Diouf. Application de méthodes probabilistes à l'analyse des couplages en Compatibilité électromagnétique et contribution à la sûreté de fonctionnement de systèmes électroniques. Electromagnétisme. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2008. Français. NNT : 2008CLF21832 . tel-00728818

HAL Id: tel-00728818

<https://theses.hal.science/tel-00728818>

Submitted on 6 Sep 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. 1832
EDSPIC : 327

UNIVERSITE BLAISE PASCAL - CLERMONT II
ECOLE DOCTORALE
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR DE CLERMONT-FERRAND

Thèse

Présentée par

Fatou DIOUF

DESS Compatibilité Electromagnétique des Systèmes Industriels

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITE

SPÉCIALITÉ : Electromagnétisme

**Application de méthodes probabilistes à
l'analyse des couplages en Compatibilité Electromagnétique et
contribution à la sûreté de fonctionnement de systèmes électroniques**

Soutenue publiquement le 28 Mai 2008 devant le jury :

M. Marc HELIER	Président et Rapporteur	Professeur- Université Pierre et Marie Curie- Ivry sur Seine
M. Flavio CANAVERO	Rapporteur et Examineur	Professeur- Politecnico di Torino-Italie
M. Fabien MANGEANT	Examineur	Ingénieur-EADS CCR- Innovation Work-Suresnes
M. Pierre BONNET	Examineur	Maître de conférences- Université Blaise Pascal
Mme Françoise PALADIAN	Directeur de thèse	Professeur- Université Blaise Pascal
M. Michel FOGLI	Directeur de thèse	Professeur- Université Blaise Pascal

THÈSE PRÉPARÉE AU SEIN DU LABORATOIRE DES SCIENCES ET MATÉRIAUX POUR
L'ELECTRONIQUE ET D'AUTOMATIQUE EN COLLABORATION AVEC
LE LABORATOIRE DE MÉCANIQUE ET INGÉNIERIES DE CLERMONT-FERRAND

A ma famille,

Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers toutes les personnes qui ont participé, de près ou de loin, à l'élaboration de ce document.

Je souhaite adresser mes remerciements à Françoise Paladian pour m'avoir fait confiance en me permettant d'effectuer ces travaux au sein de l'équipe CEM. Je tiens à la remercier pour tout ce que ces années m'ont apportée tant sur le plan des connaissances que sur le plan relationnel. Je la remercie également pour son encadrement exemplaire et sa patience.

Je remercie également Michel Fogli pour m'avoir donnée goût aux probabilités et à la statistique. Son savoir, sa rigueur et sa disponibilité sont autant de qualités que j'ai pu apprécier. Elles ont contribué à rendre ce travail parfois exigeant mais toujours passionnant. Qu'il veuille trouver ici ma profonde gratitude.

Que Pierre Bonnet et Cédric Chauvière trouvent ici mes profonds remerciements pour leurs aides précieuses. J'ai pu apprécier au cours de ces années leurs grandes disponibilités.

Je remercie également Monsieur Flavio Canavero et Monsieur Marc Hélier qui ont accepté de rapporter ce travail et de participer au jury.

Je remercie Monsieur Fabien Mangeant pour avoir bien voulu participer au jury.

Je remercie Sébastien Lalléchère, Sébastien Girard et Marco Klingler pour leurs aides précieuses.

Cette thèse n'aurait pas pu être un plaisir sans les personnes que j'ai pu côtoyer aussi bien au LASMEA que dans les autres laboratoires du campus. Je les remercie pour leur sympathie.

Je remercie énormément ma famille, sans laquelle je n'aurais jamais pu concrétiser ces années d'études. J'adresse toute ma reconnaissance à mes parents, à mes frères et soeurs ainsi qu'à mes amis pour leur humanisme et leur soutien à des moments difficiles.

Résumé

L'utilisation croissante d'appareils électroniques et la multiplicité des sources de perturbation ont conduit à l'étude de nouveaux moyens d'essais permettant d'améliorer la répétitivité des mesures en Compatibilité ElectroMagnétique (CEM), en particulier aux fréquences supérieures au GigaHertz. Dans ce contexte, la Chambre Réverbérante à Brassage de Modes (CRBM) représente un outil attractif, tant au niveau des mesures en immunité qu'en émission. Cependant, de nombreuses questions restent encore ouvertes quant au comportement des CRBM, en présence ou non de l'équipement sous test : les travaux présentés dans ce mémoire ont pour but d'apporter une contribution au volet probabiliste de l'étude du champ électromagnétique en CRBM.

Il est tout d'abord vérifié, à partir de tests statistiques et de mesures expérimentales, la légitimité en CRBM réelle, des différentes hypothèses relatives aux grandeurs électromagnétiques générées en environnement réverbérant " idéal ". Sous cette condition, l'étude d'une ligne de transmission a montré l'influence de la directivité dans la relation entre les champs électriques de calibrage en chambre anéchoïque et en CRBM, pour une valeur identique du courant induit à son extrémité.

Par ailleurs, il importe d'appréhender en quel sens l'environnement en CRBM peut être " comparé " à celui généré à l'intérieur d'enceintes semi-fermées (véhicule automobile) soumis à un champ électromagnétique perturbateur externe. Afin d'apporter des prémices de réponses à cette question, il est présenté une comparaison des paramètres statistiques du champ électromagnétique, caractérisant ces deux types d'environnements.

Enfin, les hypothèses vérifiées en haute fréquence (environnement réverbérant " idéal ", pertes des parois prédominantes), ont conduit au développement d'un modèle probabiliste original consistant à assimiler la CRBM à une cavité dont les parois sont caractérisées par une conductivité aléatoire. La loi de probabilité de cette variable aléatoire est établie à partir de résultats de mesures et d'une formulation validée dans les hautes fréquences. Ce modèle de conductivité est ensuite proposé pour la résolution des équations de Maxwell par une méthode de collocation stochastique. Il est démontré qu'un faible nombre de simulations de la cavité sans brasseur peut se substituer à la modélisation déterministe de la CRBM dans son ensemble, pour l'estimation des moments du premier ordre du champ électrique généré dans le volume utile de la structure. Par ailleurs, l'application de la méthode de collocation stochastique à un formalisme précédemment validé pour l'étude de structures filaires immergées dans une cavité a conduit à une modélisation efficace et réaliste d'un dipôle rayonnant en CRBM.

Mots-Clés :

Chambre Réverbérante à Brassage de Modes (CRBM), Champ électromagnétique aléatoire, Densité de probabilité, Ergodicité, Méthode de collocation stochastique.

Abstract

Increasing use of electronic devices and multiplicity of sources of disturbance led to the study of new test facilities making it possible to improve the repetitivity of measurements of Electromagnetic Compatibility (EMC), in particular at frequencies higher than the Gigahertz. In this context, the Reverberation Chamber (RC) represents an attractive tool, as well in immunity measurements as in emission. However, many questions remain still open for the behaviour of the RC, in presence or not of the equipment under test : the purpose of the work presented in this thesis is to contribute a share to the probabilistic shutter of the study of the electromagnetic field in RC.

Starting from statistical tests and experimental measurements, the legitimacy in real RC is verified with the various assumptions relating to the electromagnetic fields generated in "ideal" reverberating environment. Under this condition, the study of a line of transmission showed the influence of directivity in the relation between the electric fields of calibration in Anechoic Chamber (AC) and RC, for an identical value of the current induced at its termination.

In addition, it is important to apprehend in which direction the environment in RC can "be compared" with that generated inside half-closed enclosures (vehicle) subjected to an external disturbing electromagnetic field. In order to bring first steps of answers to this question, it is presented a comparison of the statistical parameters of the electromagnetic field, characterizing these two types of environments.

Lastly, the assumptions checked in high frequency ("ideal" environment reverberating, losses of the prevalent walls), led to the development of an original probabilistic model consisting of assimilating the RC to a cavity whose walls are characterized by a random conductivity. The probabilistic density function of this random variable is established starting from formulation and measurement results validated in the high frequencies. This model of conductivity is then proposed for the resolution of the Maxwell's equations by a stochastic collocation method. It is shown that a low number of simulations of the cavity without stirrer can replace the deterministic modelling of the RC as a whole, for the estimation of the statistical parameters of the electric field generated in the working volume of the structure. In addition, the application of the stochastic collocation method to the formalism previously validated for the study of wires immersed in a cavity led to an effective and realistic modelling of a radiated wire in RC.

Keywords :

Reverberation Chamber (RC), Electromagnetic random field, Probability density function, Ergodicity, Stochastic collocation method.

Table des matières

1	Chambre Réverbérante et modélisation stochastique	20
1.1	Intérêt d'une approche probabiliste pour l'analyse de la CRBM	21
1.2	Sur la détermination de la fréquence minimale d'utilisation des CRBM par des tests statistiques	23
1.2.1	Principe général de fonctionnement d'une CRBM	23
1.2.2	CRBM idéale : Représentation intégrale de Hill	24
1.2.3	Application de tests statistiques pour l'analyse des CRBM	25
1.2.3.1	Acquisition des données : critère de non corrélation	26
1.2.3.2	Tests d'adéquation de lois théoriques appliqués à la caractérisation des CRBM	27
1.2.3.3	Test d'homogénéité du khi deux pour l'analyse comportementale d'une CRBM	31
1.2.4	Limitation en fréquence des études probabilistes	34
1.3	Etude de l'immunité de systèmes électroniques	35
1.3.1	Approche probabiliste pour le calcul du courant induit en sortie d'une ligne de transmission	35
1.3.1.1	Equations de couplage d'une ligne de transmission avec un champ électromagnétique externe	36
1.3.1.2	Loi de probabilité du courant induit en sortie de la ligne de transmission	37
1.3.1.3	Evaluation de la moyenne du courant induit en sortie de la ligne de transmission	39
1.3.2	Relation entre les amplitudes du champ électrique de calibrage en Chambre Anéchoïque et en Chambre Réverbérante à Brassage de Modes pour un même niveau d'immunité	40
1.3.2.1	Courant induit à l'extrémité d'une ligne de transmission en environnement CRBM	41
1.3.2.2	Courant induit à l'extrémité d'une ligne de transmission en environnement CA	41
1.3.2.3	Relation entre les champs de calibrage en CA et en CRBM pour un niveau d'immunité équivalent	42
2	Caractérisation probabiliste de l'environnement électromagnétique dans des structures semi-fermées	47
2.1	Comparaison des paramètres probabilistes des environnements CRBM et véhicule automobile	49
2.1.1	Estimation des densités de probabilité du champ électromagnétique en CRBM	50
2.1.1.1	Densité de probabilité du module d'une composante du champ électrique	51

2.1.1.2	Densité de probabilité du module du champ électrique total	52
2.1.2	Caractéristiques du champ électromagnétique dans le véhicule et comparaison avec la CRBM	54
2.1.2.1	Champ électromagnétique dans le compartiment véhicule	54
2.1.2.2	Champ électromagnétique induit au niveau des faisceaux	59
2.2	Estimation statistique du champ électromagnétique aléatoire généré dans un véhicule automobile	62
2.2.1	Acquisition des données : simulation du véhicule avec un code temporel	62
2.2.2	Hypothèses sur le champ électromagnétique du véhicule automobile	64
2.2.3	Estimation des paramètres du second ordre du champ aléatoire	66
3	Analyse comportementale de la CRBM par une méthode de collocation stochastique	74
3.1	Modèle déterministe d'une Chambre Réverbérante à Brassage de Modes	78
3.1.1	Sur l'importance du coefficient de qualité et sa relation avec la conductivité des parois	78
3.1.2	Modélisation déterministe de la CRBM	81
3.1.2.1	Equations de Maxwell	81
3.1.2.2	Résolution numérique des équations de Maxwell et modélisation déterministe de la CRBM	82
3.2	Définition d'un modèle probabiliste d'une Chambre Réverbérante à Brassage de Modes	88
3.2.1	Analogie probabiliste	88
3.2.2	Loi de distribution de la conductivité des parois de la CRBM	89
3.3	Résolution des équations de Maxwell par une méthode de collocation stochastique	90
3.3.1	La méthode de collocation déterministe	90
3.3.2	Application d'une méthode de collocation stochastique aux équations de Maxwell	93
3.3.3	Approximation des caractéristiques statistiques du second ordre du champ électrique aléatoire	95
3.3.3.1	Approximation de la moyenne	95
3.3.3.2	Approximation de la variance	96
3.4	Application de la méthode de collocation stochastique à l'analyse comportementale de la Chambre Réverbérante à Brassage de Modes	97
3.4.1	Détermination des points de collocation	98
3.4.2	Résolution des équations de Maxwell-Modélisation de la cavité	98
3.4.3	Evolution du champ électrique en fonction des points de collocation	99
3.4.4	Estimation de la moyenne et de l'écart-type	100
3.4.5	Valeurs expérimentale et théorique du coefficient de variation du champ électrique	102
3.4.6	Intervalle de confiance du coefficient de variation du champ électrique	103
3.5	Application de la méthode de collocation à l'étude de l'émission d'un dipôle en CRBM	107
3.5.1	Analogie probabiliste entre le brasseur et le coefficient de qualité	108
3.5.2	Estimation du courant par une méthode des moments basée sur la fonction de Green des cavités	110
3.5.2.1	Décomposition de la fonction de Green des cavités	111
3.5.2.2	Choix du "splitting parameter"	112
3.5.2.3	Evaluation du courant par une méthode des moments	114
3.5.3	Influence de la cavité sur la distribution du courant le long du dipôle	115
3.5.4	Influence de la cavité sur la résistance interne du dipôle et la puissance d'alimentation	116

3.5.5	Estimation de la moyenne des paramètres intrinsèques au dipôle par une méthode de collocation stochastique	118
Conclusion		125
A Quelques définitions		127
A.1	Variable aléatoire	127
A.2	Processus aléatoire	127
A.3	Champ aléatoire	127
B Quelques lois dérivées de la loi gaussienne : loi de Rayleigh généralisée d'ordre n, loi du khi-deux à n ddl, loi du khi-quatre à n ddl		128
B.1	Notations	128
B.2	Loi de Rayleigh généralisée d'ordre n	129
B.3	Loi de Rayleigh généralisée d'ordre n à facteur d'échelle	129
B.4	Loi du khi-deux à n ddl	130
B.5	Loi du khi-deux à n ddl à facteur d'échelle	131
B.6	Loi du khi-quatre à n ddl	131
B.7	Loi du khi-quatre à n ddl à facteur d'échelle	132
C Vérification de l'ajustement d'une loi théorique à une distribution empirique par le test d'adéquation du χ^2		133
C.1	Introduction	133
C.2	Position du problème	133
C.3	Principe du test	133
D Simulation d'un champ aléatoire vectoriel gaussien, homogène, centré		136
D.1	Hypothèses sur le champ à simuler	136
D.2	Hypothèses sur la densité spectrale du champ	136
D.3	Factorisation de $S_{\mathbb{X}}(\omega)$	137
D.4	Discrétisation du domaine spectral	137
D.5	Discrétisation du domaine de simulation	137
D.6	Approximation du processus \mathbb{X}	139
D.7	Algorithme de simulation	141
D.8	Cas d'un champ vectoriel complexe	142
E Formules numériques pour l'estimation de la moyenne, de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance d'un champ aléatoire vectoriel du second ordre, homogène d'ordre deux		144
E.1	Hypothèses, notations	144
E.2	Estimation de la moyenne	145
E.2.1	Expression de l'estimateur	145
E.2.2	Formule numérique pour le calcul d'une estimée	145
E.3	Estimation de la fonction d'autocorrélation	145
E.3.1	Expression de l'estimateur	146
E.3.2	Formule numérique pour le calcul d'une estimée	146
E.4	Estimation de la densité spectrale	147

E.4.1	Expression de l'estimateur	147
E.4.2	Formule numérique pour le calcul d'une estimée	148
E.5	Retour sur l'estimation de la fonction d'autocorrélation	149
E.5.1	Expression de l'estimateur	149
E.5.2	Formule numérique pour le calcul d'une estimée	149
F	Calcul par Transformée de Fourier des formules de Kintchine pour les champs aléatoires vectoriels homogènes	152
F.1	Position du problème	152
F.2	Préparation du travail	152
F.3	Calcul de la densité spectrale à partir de la fonction d'autocorrélation	153
F.3.1	Discrétisation du domaine d'intégration	153
F.3.2	Discrétisation du domaine fréquentiel	154
F.3.3	Calcul de la densité spectrale	154
F.4	Calcul de la fonction d'autocorrélation à partir de la densité spectrale	156
F.4.1	Discrétisation du domaine d'intégration $\overline{\Omega}$	156
F.4.2	Discrétisation du domaine temporel	157
F.4.3	Calcul de la fonction d'autocorrélation	157
	Bibliographie	163
	Publications personnelles	165

Principales notations

$\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$	repère cartésien de base canonique
$\mathcal{R}_s = (0, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi)$	repère sphérique
t	temps
\mathcal{F}	transformée de Fourier
$\mathbf{f}([\bullet])$	fonction de $[\bullet]$
\mathbf{F}	vecteur de polarisation aléatoire d'une onde plane
$(\mathbf{F}_\theta^R, \mathbf{F}_\varphi^R, \mathbf{F}_\theta^I, \mathbf{F}_\varphi^I)$	parties réelles et imaginaires de \mathbf{F}
f	fréquence d'étude
$f_{m,n,p}$	fréquences de résonance du mode m, n, p
f_0	fréquence de résonance du mode fondamental :
	$m = 1, n = 1, p = 0$
f_{lim}	fréquence limite d'utilisation de la CRBM
c	vitesse de la lumière
ω	pulsation
λ	longueur d'onde
k	nombre d'onde dans l'air
(S)	sphère de rayon unité
s	écart-type des parties réelles et imaginaires des composantes du champ électrique en CRBM
$s[\bullet]$	écart-type de $[\bullet]$
$s_m[\bullet]$	facteur d'échelle issu de la moyenne de $[\bullet]$
$s_e[\bullet]$	facteur d'échelle issu de l'écart-type de $[\bullet]$
N	nombre de réalisations i.e. de positions de brasseur
$\ll [\bullet] \gg_N$	moyenne sur N réalisations de $[\bullet]$
$\ [\bullet] \ $	module de $[\bullet]$
$\mathcal{N}(0, s^2)$	loi normale de moyenne 0 et d'écart-type s
ρ	coefficient de corrélation
H_0	hypothèse vraie
H_1	hypothèse alternative
α	erreur de première espèce
β	erreur de deuxième espèce
$F[\bullet]$	fonction de répartition estimée de $[\bullet]$
$P[\bullet]$	densité de probabilité estimée de $[\bullet]$
Dis	fonction discriminante du test de Kolmogorov-Smirnov
ε	permittivité du milieu

ε_0	permittivité du vide
ε_r	permittivité relative du milieu
μ	perméabilité du milieu
μ_0	perméabilité du vide
μ_r	perméabilité relative du milieu
$(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) =$ $(\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3)$	pas de discrétisation spatiale sur les différents axes 0x, 0y, 0z respectivement
Z_0	impédance du vide
Z_c	impédance caractéristique d'un conducteur
γ	exposant linéique de propagation d'une ligne de transmission
r, l, c, g	paramètres linéiques d'une ligne de transmission
κ_1, κ_2	coefficients de réflexion en entrée et sortie du conducteur
$\overset{\circ}{G} = (\overset{\circ}{G}_1, \dots, \overset{\circ}{G}_n)$	variable aléatoire gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}_n
U	variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$
P_r	puissance reçue en CRBM
P_r^{CA}	puissance reçue en CA
P_r^{norm}	puissance reçue normalisée à sa valeur moyenne sur une révolution de brasseur en CRBM
D	directivité de l'équipement
$\ [\bullet] \ _{max}$	valeur maximale du module de $[\bullet]$
I_s	courant en sortie du conducteur en CRBM
I_s^{CA}	courant en sortie du conducteur en CA
$\theta^p, \varphi, \theta$	angles de polarisation, d'azimut et d'élévation du champ électrique en CA
$\ [\bullet] \ _{eff}$	valeur efficace du module de $[\bullet]$
V_{co}	tension en circuit ouvert
h_{eff}	hauteur effective d'une antenne
R_{ray}	résistance de rayonnement d'une antenne
Z_{in}	impédance interne d'une antenne
σ	conductivité
\overline{T}	domaine de simulation
$T_i, (i = 1, \dots, d)$	longueurs des arêtes du pavé dans les directions des d axes cartésiens
τ_0	retard temporel
τ_r	retard spatial
ℓ_s	largeur caractéristique d'une gaussienne
A	constante
\overline{F}	intervalle fréquentiel d'étude
$\overline{\tau}$	intervalle temporel d'étude
$< [\bullet], [\bullet] >$	produit scalaire euclidien
$\nu = (\nu_x, \nu_y, \nu_z) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$	distance entre 2 points du repère cartésien
$\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$	variable duale de ν
$\mathcal{L} = 1, \dots, \mathbb{L}$	ensemble fini ordonné d'indices de cardinal $\mathbb{L} \geq 1$
$\mathbb{E}[\bullet]$	opérateur espérance mathématique de $[\bullet]$

$\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}), (f; \mathbf{r}) \in \mathbb{R}_+ \times D)$ avec $D \in \mathbb{R}^3$	représentation fréquentielle du champ électrique en CRBM
$\hat{\mathbf{B}} = (\hat{\mathbf{B}}(f; \mathbf{r}), (f; \mathbf{r}) \in \mathbb{R}_+ \times D)$ avec $D \in \mathbb{R}^3$	représentation fréquentielle du champ magnétique en CRBM
$\forall \mathbf{r} \in D, \hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}) = \mathcal{F}(\mathbf{E}(t; \mathbf{r}))$	
$\hat{\mathbf{E}}_p, p = \{x, y, z\}$	composante p du champ électrique en CRBM
$\hat{\mathbf{E}}_p^{\mathbf{R}}, p = \{x, y, z\}$	partie réelle de la composante p du champ électrique en CRBM
$\hat{\mathbf{E}}_p^{\mathbf{I}}, p = \{x, y, z\}$	partie imaginaire de la composante p du champ électrique en CRBM
$\hat{\mathbf{E}}^{CA}$	champ électrique généré en CA
$\hat{\mathbf{E}}^{fais}$	champ électrique généré sur les faisceaux d'une voiture
$\hat{\mathbf{E}}^{hab}$	champ électrique généré dans l'habitacle d'une voiture
$\Sigma = (\hat{\mathbf{E}}^{\mathbf{R}}; \hat{\mathbf{E}}^{\mathbf{I}})$	champ électrique aléatoire dans l'habitacle de la voiture
R_{Σ}	fonction de corrélation de Σ
S_{Σ}	densité spectrale de puissance de Σ
C_{Σ}	fonction de covariance de Σ
$[\bullet]^T$	transposée d'une matrice ou d'un vecteur
$[\bullet]^*$	transposée conjuguée
Q	facteur de qualité
δ	épaisseur de peau
P_d	puissance dissipée en CRBM
P_t	puissance transmise en CRBM
U	énergie emmagasinée en CRBM
V	volume de la CRBM
S	surface des parois
Z_s	impédance de surface du conducteur
CRBM	Chambre Réverbérante à Brassage de Modes
CA	Chambre Anéchoïque
FDTD	Finite Difference in Time Domain
FVTD	Finite Volume in Time Domain
SIBC	Surface Impedance Boundary Condition

Table des figures

1.1	Recouvrement des modes excités	23
1.2	Angle de rotation du brasseur pour avoir des réalisations " non corrélées " selon la norme IEC 61000-4-21	27
1.3	Test d'adéquation du KS appliqué à la puissance reçue normalisée à sa valeur moyenne pour différentes valeurs de l'erreur de première espèce α	29
1.4	Test d'adéquation du χ^2 appliqué à la puissance reçue normalisée à sa valeur moyenne pour différentes valeurs de l'erreur de première espèce α	30
1.5	Emplacement des points de mesure du champ électrique dans le volume utile de la CRBM du LASMEA	32
1.6	Moyenne du module du champ total en 80 points du volume utile	32
1.7	Principe d'application du test d'homogénéité	33
1.8	Pourcentage de couples de points (sur un total de 79) dépassant le seuil critique	33
1.9	Illustration des différentes zones de fonctionnement d'une cavité	34
1.10	Cartographie du module du champ total à 320MHz et 1GHz	35
1.11	Conducteur sans pertes	36
1.12	Densité de probabilité du courant d'extrémité	39
1.13	Comparaison des estimées numériques de $\ll \ I_s(f) \ \gg$ fournies par les deux méthodes	39
1.14	Evolution de $\ll \ I_s(f) \ \gg_N$ et $\ I_s^{CA}(f) \ _{max}$ en fonction de la fréquence et pour $\ \hat{E}^{CA}(f) \ _{eff} = \ll \ \hat{E}(f) \ \gg_N$	43
1.15	Schéma de Thévenin équivalent à la ligne de transmission	43
1.16	Evolution du rapport $\ \hat{E}^{CA}(f) \ _{eff} / \ll \ \hat{E}(f) \ \gg_N$ en fonction de la fréquence	45
2.1	Représentation d'un véhicule automobile	50
2.2	Comparaison entre les fonctions de répartition théorique et estimée de $\ \hat{E}_y \ $	52
2.3	Comparaison entre les fonctions de répartition théorique et estimée de $\ \hat{E}_{tot} \ $	54
2.4	8111 points de calcul dans l'habitacle du véhicule	55
2.5	Fonction de répartition de la partie réelle de \hat{E}_x à 900MHz	55
2.6	Densité de probabilité de $\ \hat{E}_y \ $ à 900MHz	56
2.7	Densité de probabilité de $\ \hat{E}_{tot} \ $ à 900MHz	56
2.8	Densité de probabilité de $\ \hat{E}_{tot} \ $ dans l'habitacle et en CRBM à 900MHz	57
2.9	Densité de probabilité de $\ \hat{E}_z \ $ dans l'habitacle à 433MHz	57
2.10	Fonction de répartition de $\ \hat{E}_{tot} \ $ dans l'habitacle à 146MHz	58
2.11	3072 points de calcul sur les faisceaux de la voiture	59
2.12	Fonction de répartition de la partie imaginaire de \hat{E}_x à 900MHz	59
2.13	Fonction de répartition de $\ \hat{E}_x \ $ à 900MHz	60
2.14	Fonction de répartition de $\ \hat{E}_{tot} \ $ à 900MHz	60

2.15	Fonction de répartition de $\ \hat{\mathbf{E}}_{tang}\ $ à 900MHz	61
2.16	Points d'acquisition du champ électromagnétique dans l'habitacle de la voiture	62
2.17	Résolution FDTD	63
2.18	Ondes planes	64
2.19	Test d'adéquation du KS appliqué au module champ total normalisé à sa valeur moyenne pour différentes valeurs de l'erreur de première espèce α	65
2.20	Terme diagonal $S_{\hat{\mathbf{E}}_x^R \hat{\mathbf{E}}_x^R}$ de la DSP estimée dans l'habitacle du véhicule à 1.1GHz	67
2.21	Terme diagonal $C_{\hat{\mathbf{E}}_z^I \hat{\mathbf{E}}_z^I}$ de la fonction de covariance à 1.1GHz	68
2.22	Coefficient de corrélation entre les composantes $\hat{\mathbf{E}}_x^I$ et $\hat{\mathbf{E}}_z^I$ près de la caisse du véhicule	68
2.23	Coefficient de corrélation entre les composantes $\hat{\mathbf{E}}_x^I$ et $\hat{\mathbf{E}}_z^R$ près de la caisse du véhicule	69
2.24	Coefficient de corrélation entre les composantes $\hat{\mathbf{E}}_x^I$ et $\hat{\mathbf{E}}_z^I$ au centre de l'habitacle	69
2.25	Coefficient de corrélation entre les composantes $\hat{\mathbf{E}}_x^I$ et $\hat{\mathbf{E}}_z^R$ au centre de l'habitacle	70
2.26	Coefficient de corrélation de la composante $\hat{\mathbf{E}}_x^R$ au centre de l'habitacle	71
2.27	Coefficient de corrélation de la composante $\hat{\mathbf{E}}_x^R$ près de la caisse	71
3.1	Coefficient de qualité de la CRBM du LASMEA	80
3.2	Stabilisation de la composante suivant x du champ électrique en différents points d'observation. Les données brutes ont été posttraitées afin de visualiser uniquement l'enveloppe des courbes	85
3.3	Stabilisation de la composante suivant z du champ électrique en un point et pour différentes valeurs de la conductivité	86
3.4	Stabilisation de la composante suivant x du champ électrique pour différents points et différentes valeurs de la conductivité	86
3.5	Allure temporelle d'une composante du champ à l'intérieur d'une cavité résonnante de conductivité $\sigma = 1719S/m$ simulée en utilisant un maillage «grossier»	87
3.6	Densité de probabilité de la conductivité à 690MHz	90
3.7	Valeurs des 4 points de collocation et de la conductivité moyenne en fonction de la fréquence	98
3.8	Amplitude du module du champ total à 1GHz	99
3.9	Réalisations du module du champ total à 620MHz pour différents points de collocation en différents points du volume utile	100
3.10	Prise en compte du poids de chaque point de collocation à 620MHz	101
3.11	Moyenne et écart-type du module du champ à 620MHz	101
3.12	Coefficient de variation numérique du module du champ total en fonction du nombre de points de collocation	102
3.13	Comparaison entre le coefficient de variation théorique du module du champ total et celui calculé à partir des mesures expérimentales relevées en 80 points du volume utile pour 51 pas de brasseur	104
3.14	Coefficient de variation en 80points du volume utile	105
3.15	Comparaison entre le coefficient de variation expérimental du module du champ total et celui issu de la méthode de collocation en 80 points du volume utile (4 pts de collocation)	105
3.16	Densité de probabilité du coefficient de qualité à 250MHz et 690MHz	110
3.17	Nombre de termes nécessaires à la convergence de G_{z1}^A avec une cavité de la taille de la CRBM	113
3.18	Convergence de la fonction de Green	114
3.19	Partie réelle du courant à 600MHz pour différentes valeurs de Q	115

3.20	<i>Partie imaginaire du courant à 600MHz pour différentes valeurs de Q</i>	115
3.21	<i>Partie réelle du courant le long du dipôle par une méthode de Monte-Carlo (51 valeurs de Q) et pour $Q = Q_{moy}$</i>	116
3.22	<i>Valeurs de Q</i>	117
3.23	<i>R_{in} et P_{alim} en fonction de Q</i>	118
3.24	<i>$\ll P_{alim} \gg$ en fonction du nombre de simulations à 490MHz</i>	119
3.25	<i>Convergence de P_{alim}</i>	120
3.26	<i>P_{alim} en fonction des points de collocation</i>	120
3.27	<i>Prise en compte des poids des points de collocation</i>	121
3.28	<i>Valeurs moyennes de la puissance d'alimentation</i>	122
3.29	<i>Valeurs moyennes de la résistance interne</i>	122
3.30	<i>Rapport R_{in}/R_{ray}</i>	123
D.1	<i>Subdivision du domaine spectral</i>	138
D.2	<i>Subdivision du domaine de simulation</i>	140

Liste des tableaux

1.1	<i>Critères des tests statistiques</i>	29
1.2	<i>Coordonnées des points délimitant le volume utile de la CRBM</i>	31
2.1	<i>Seuil de l'estimée du coefficient de corrélation en fonction de l'erreur de première espèce α et pour un degré de liberté de 60</i>	70
3.1	<i>Fonctions test et méthodes associées</i>	93
3.2	<i>Poids des points de collocation pour $n = 4$</i>	100
3.3	<i>Comparaison entre les estimées expérimentales et numériques du coefficient de variation à 400MHz</i>	106
3.4	<i>Comparaison entre les estimées expérimentales et numériques du coefficient de variation à 620MHz</i>	107
3.5	<i>Points de collocation avec leur poids respectifs à 600MHz</i>	120

Introduction

Les exigences essentielles de la Compatibilité ElectroMagnétique (CEM) visent à assurer un fonctionnement optimal des systèmes électroniques vis-à-vis de phénomènes électromagnétiques extérieurs. Elles conduisent également à limiter l'émission par ces mêmes appareils, de parasites électromagnétiques susceptibles de perturber les systèmes et équipements voisins. L'utilisation croissante d'appareils électroniques et la multiplicité des sources de perturbation ont conduit à l'étude de nouveaux moyens d'essais permettant d'améliorer la répétitivité des mesures CEM, en particulier aux fréquences supérieures au GigaHertz. Dans ce contexte, la Chambre Réverbérante à Brassage de Modes (CRBM) représente un outil attractif, tant au niveau des mesures en immunité qu'en émission. En CRBM, l'évaluation du seuil de susceptibilité d'un système électronique, soumis à un nombre fini d'ondes planes d'incidence et de polarisation aléatoires, est indépendante de sa position, contrairement aux essais en Chambre Anéchoïque (CA). Cependant, certaines caractéristiques du système sous test, telles que sa directivité, sont occultées par le principe même de fonctionnement de la CRBM. Par ailleurs, un paramètre important de cette structure, en l'occurrence sa fréquence minimale de fonctionnement reste difficile à déterminer de manière simple. Ainsi, de nombreuses questions restent encore ouvertes quant au comportement des CRBM, en présence ou non de l'équipement sous test. Actuellement reconnues par les normes en vigueur comme une alternative à des moyens d'essais CEM tels que la CA, on peut encore s'interroger sur la pertinence des protocoles de mesure recommandés pour la phase de calibrage, ainsi que pour les mesures en immunité et émission. Il s'agit, lors des essais, de reproduire les conditions idéales correspondant à un nombre infini de positions de brasseur. Chaque configuration de ce système dans la cavité correspondant à un environnement spécifique, le champ électromagnétique représente alors, en un point donné du volume utile, une variable aléatoire, et les N positions du brasseur, les N réalisations de cette variable aléatoire. De nombreuses études ont alors été orientées vers l'analyse de propriétés de l'environnement en CRBM ; par exemple, les travaux de Lehman en 1993 et ceux de Hill à la fin des années 90, ont permis d'établir des propriétés et hypothèses liées à la nature aléatoire du champ électromagnétique en CRBM idéale. Néanmoins, une étude stochastique du champ électromagnétique en CRBM réelle devient primordiale pour l'estimation des prédictions théoriques. Les travaux présentés dans ce mémoire ont pour but d'apporter une contribution à ce volet probabiliste de l'étude du champ électromagnétique en CRBM.

Pour ce faire, nous vérifierons dans un premier chapitre, à l'aide de tests statistiques et de mesures expérimentales, la légitimité en CRBM réelle, des différentes hypothèses relatives aux grandeurs électromagnétiques générées en environnement réverbérant " idéal ". Nous serons donc amenés à examiner la valeur de la fréquence d'utilisation minimale de la CRBM du LASMEA. Ce paramètre est indispensable pour l'analyse de l'immunité de systèmes électroniques. En effet, dans le cas où le comportement de l'équipement sous test ne modifie pas l'environnement électromagnétique initial, et est régi par une formule analytique, l'idée est de s'affranchir de la simulation de la CRBM. Ainsi, pour une ligne de transmission, il sera déterminé la loi de probabilité du courant induit, cette démarche étant illustrée par un exemple précédemment traité dans la littérature. Par ailleurs, cette première étude aura pour ob-

jectif une meilleure interprétation des résultats issus de mesures dans la CRBM à partir de ceux, mieux maîtrisés, obtenus en CA. En effet, de nombreux travaux ont porté sur l'influence de la directivité de l'équipement lorsqu'il s'agit d'analyser le niveau d'immunité d'un système en CA et en CRBM. Le cas d'une ligne de transmission sera ainsi de nouveau examiné de manière à prédire la relation entre les champs électriques de calibrage en CA et en CRBM, pour une valeur identique du courant induit à son extrémité.

Les normes actuelles proposent la CRBM comme moyen d'essai en immunité rayonnée pour les équipements confinés dans des enceintes métalliques fermées ou semi-fermées, les tests étant jusqu'alors réalisés en CA. Il importe alors d'appréhender en quel sens l'environnement en CRBM peut être comparé à celui généré à l'intérieur de ces enceintes soumises à un champ électromagnétique perturbateur externe. Afin d'apporter des prémices de réponses à cette question, une comparaison des paramètres statistiques du champ électromagnétique, caractérisant ces deux types d'environnements, sera réalisée dans un deuxième chapitre. L'approche proposée s'appuie sur la comparaison des densités de probabilité du champ électromagnétique en CRBM et dans un véhicule automobile. Nous considérerons alors les estimées de la densité de probabilité issues de données expérimentales pour la CRBM, et de résultats de simulations numériques pour le véhicule automobile soumis à une perturbation électromagnétique externe. Cependant, une comparaison probabiliste complète nécessite l'estimation de paramètres tels que la covariance du champ électromagnétique. Des techniques d'estimation de paramètres aléatoires empruntées à la mécanique probabiliste seront utilisées à cette fin. Les algorithmes d'estimation des paramètres probabilistes du champ aléatoire seront alors appliqués au champ électromagnétique issu du véhicule automobile, afin d'analyser le comportement du champ dans cette structure. Cette phase d'estimation des paramètres statistiques est essentielle pour celle de la modélisation du champ aléatoire. L'application de ces algorithmes en CRBM aurait pu être envisagée dans le but, notamment, de vérifier les hypothèses établies par Hill. Or, cette approche nécessite un nombre extrêmement important de données, conduisant à des durées irréalistes de programmes de mesures. Par ailleurs, si le recours aux simulations numériques déterministes peut être envisagé, ce choix se révélera coûteux en termes de temps de calcul et d'espace mémoire de par la prise en compte du brasseur à géométrie complexe. Cet inconvénient se vérifie d'autant plus dans les plus hautes fréquences, soit dans la zone de fonctionnement optimale de la CRBM. Il semble alors judicieux de développer une méthodologie dont l'objectif est de s'affranchir de la modélisation explicite du brasseur, sans pour cela voiler la représentativité des champs électromagnétiques générés dans la CRBM étudiée. Dans cet objectif, l'utilisation de méthodes probabilistes efficaces représente une alternative aux techniques déterministes, alternative qui pourrait se révéler d'un intérêt majeur dans le cas d'une CRBM chargée.

Le troisième chapitre, sera consacré à l'étude d'un modèle probabiliste consistant à assimiler la CRBM à une cavité dont les parois sont caractérisées par une conductivité aléatoire. La loi de probabilité de cette variable aléatoire sera, dans une première étape, établie à partir de résultats de mesures et d'une formulation validée dans les hautes fréquences. Ce modèle de conductivité sera ensuite proposé pour la résolution des équations de Maxwell par une méthode de collocation stochastique. Nous montrerons qu'un faible nombre de simulations de la cavité sans brasseur peut se substituer à la modélisation déterministe de la CRBM dans son ensemble, pour l'estimation des moments du premier ordre du champ électrique généré dans le volume utile de la structure.

Enfin, le cas d'un dipôle en émission illustrera une nouvelle fois l'intérêt de la méthode de collocation stochastique, pour l'étude du comportement de la CRBM sur les caractéristiques de l'élément rayonnant. Cette étude nécessitera, dans une première phase, l'estimation de la loi de probabilité du coefficient de qualité à partir de résultats expérimentaux. La CRBM sera alors modélisée par ce paramètre introduit

dans l'équation de Hallén permettant l'évaluation du courant le long d'un dipôle. Ainsi, l'application de la méthode de collocation stochastique à un formalisme précédemment validé pour l'étude de structures filaires immergées dans une cavité conduira à une modélisation efficace et réaliste d'un dipôle rayonnant en CRBM.

Préambule

Dans tout ce qui suit, $D \subset \mathbb{R}^3$ désigne le volume utile, $\bar{\tau} \subset \mathbb{R}$ l'intervalle temporel d'étude, $\bar{F} \subset \mathbb{R}$ l'intervalle fréquentiel d'étude, $\mathbf{r} = (x, y, z)$ le point générique de D , t celui de $\bar{\tau}$, f celui de \bar{F} .

On note \mathbf{E} le champ électrique indexé en temps et $\hat{\mathbf{E}}$ le champ électrique indexé en fréquence, appelé *champ électrique fréquentiel*.

Le champ $\mathbf{E} = (\mathbf{E}(t; \mathbf{r}), t \in \bar{\tau}, \mathbf{r} \in D)$ est à valeurs dans \mathbb{R}^3 et tel que, pour tout $(t; \mathbf{r})$ fixé dans $D \times \bar{\tau}$, $\mathbf{E}_x(t; \mathbf{r})$, $\mathbf{E}_y(t; \mathbf{r})$, $\mathbf{E}_z(t; \mathbf{r})$ représentent ses coordonnées.

Le champ électrique fréquentiel $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}), \mathbf{r} \in D, f \in \bar{F})$ est à valeurs dans \mathbb{C}^3 et tel que, pour tout $(f; \mathbf{r})$ fixé dans $D \times \bar{F}$, les coordonnées $\hat{\mathbf{E}}_x(f; \mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{E}}_y(f; \mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{E}}_z(f; \mathbf{r})$ de la v.a. $\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r})$ s'écrivent :

$$\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}) = \hat{\mathbf{E}}_p^R(f; \mathbf{r}) + j\hat{\mathbf{E}}_p^I(f; \mathbf{r}) \quad , \quad p = \{x, y, z\} \quad (1)$$

$\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}), \mathbf{r} \in D, f \in \bar{F})$ est la transformée de Fourier de $\mathbf{E} = (\mathbf{E}(t; \mathbf{r}), \mathbf{r} \in D, t \in \bar{\tau})$ (cf. annexe F).

Chapitre 1

Chambre Réverbérante et modélisation stochastique

Sommaire

1.1	Intérêt d'une approche probabiliste pour l'analyse de la CRBM	21
1.2	Sur la détermination de la fréquence minimale d'utilisation des CRBM par des tests statistiques	23
1.2.1	Principe général de fonctionnement d'une CRBM	23
1.2.2	CRBM idéale : Représentation intégrale de Hill	24
1.2.3	Application de tests statistiques pour l'analyse des CRBM	25
1.2.4	Limitation en fréquence des études probabilistes	34
1.3	Etude de l'immunité de systèmes électroniques	35
1.3.1	Approche probabiliste pour le calcul du courant induit en sortie d'une ligne de transmission	35
1.3.2	Relation entre les amplitudes du champ électrique de calibrage en Chambre Anéchoïque et en Chambre Réverbérante à Brassage de Modes pour un même niveau d'immunité	40

1.1 Intérêt d'une approche probabiliste pour l'analyse de la CRBM

La recrudescence des systèmes électroniques au sein d'un même environnement est telle qu'il est aujourd'hui impossible de faire abstraction des risques introduits par les interférences électromagnétiques. L'évolution des moyens d'essais utilisés dans le domaine de la Compatibilité ElectroMagnétique (CEM) est par conséquent dictée par les caractéristiques du nouvel environnement électromagnétique. Plus particulièrement, pour les mesures en immunité rayonnée, les solutions du site en espace libre et de la Chambre Anéchoïque (CA) sont associées à l'illumination de l'Équipement Sous Test (E.S.T.) par une onde plane, de polarisation et d'incidence bien définies. Si l'utilisation d'un plateau tournant permet de multiplier les configurations d'incidence, la durée des programmes d'essais ne doit cependant pas devenir prohibitive. Est-on alors certain d'accéder aux niveaux réels de susceptibilité de l'E.S.T. par un nombre fini (et non trop important) de positions du plateau tournant ?

Par ailleurs, la multiplicité des technologies sans fils impose la nécessité de réaliser les essais en émission rayonnée à des fréquences de plus en plus élevées. Le diagramme de rayonnement des équipements devient dès lors très complexe, et se pose alors naturellement le problème de définir un paramètre pertinent pour la caractérisation de l'E.S.T.. Pour ces différentes raisons, les CRBM représentent depuis quelques années une alternative intéressante aux CA dans le domaine de l'immunité et de l'émission rayonnées [1, 2].

La CRBM est une cavité électrique à coefficient de qualité élevé, permettant de générer sous des niveaux d'énergie relativement faibles un champ électromagnétique de forte amplitude. Grâce à son brasseur de modes, système métallique de grandes dimensions, elle permet de créer un environnement électromagnétique d'incidence et de polarisation aléatoires [15] dans lequel est immergé l'E.S.T., placé dans le volume utile de la CRBM. On peut alors, sur une révolution de brasseur, déterminer le niveau d'immunité de l'équipement. S'il s'avère impossible d'accéder à la directivité d'un système par ce type d'essai, il permet en revanche d'obtenir une caractéristique pertinente en haute fréquence : la puissance totale rayonnée. On dispose ainsi d'un moyen d'essai très utile en pratique, notamment en haute fréquence.

Les CRBM ont fait l'objet, ces dernières années, d'un certain nombre d'études et de programmes de recherche dont l'un des objectifs était de préciser les protocoles de mesures. En effet, l'établissement d'un compromis entre la durée des mesures et leur représentativité, nécessite de mener à bien des analyses poussées de ce moyen d'essai. Pour ce faire, l'utilisation conjointe d'approches numérique et expérimentale peut apporter des réponses aux nombreuses interrogations soulevées au sein de la communauté CEM.

La nature modale de la cavité implique la variation spatiale du champ électromagnétique pour une géométrie donnée de la cavité ou pour une position fixée du brasseur de modes. Ainsi, les conditions expérimentales se trouvent modifiées d'où l'illumination du système sous toutes les configurations possibles. La position des maxima et minima du champ électromagnétique dans le volume utile de la cavité est alors différente d'une position à l'autre du brasseur. On ne relève plus un seul résultat mais plusieurs échantillons selon le nombre de configurations expérimentales. Le cas idéal correspond à un nombre infini de positions de brasseur. Cependant, en pratique, ce nombre doit bien évidemment rester fini ce qui amène l'opérateur à réaliser un traitement statistique des données d'un essai qui suit une procédure déterministe. Par ailleurs, les phases d'analyse comportementale de la CRBM exigent de disposer d'un nombre important, voire gigantesque, de données expérimentales afin d'appliquer les tests statistiques utiles pour la vérification des différentes propriétés statistiques relatives au champ électromagnétique. Cette base de données est donc associée à des durées prohibitives de programme d'essais d'où l'intérêt de la simulation numérique.

La modélisation numérique des CRBM n'est cependant pas triviale [3] en raison de la complexité du système (présence du brasseur,...). Les méthodes fréquentielles et temporelles représentent le sujet de nombreuses investigations [5, 6, 7, 8], ceci dans le but d'approfondir l'analyse de la structure.

Pour reproduire au mieux les conditions expérimentales, il est alors indispensable de prendre en compte la rotation du brasseur. Afin d'assurer une efficacité de brassage optimale, la grande majorité des brasseurs présente des géométries complexes. Or, pour la plupart des approches temporelles volumiques comme celles basées sur les schémas différences finies classiques ou des schémas TLM, la discrétisation cartésienne des objets est dans ce cas un handicap. Les méthodes surfaciques fréquentielles conformes peuvent relever ce défi. Toutefois, ces dernières sont plus coûteuses en termes de temps de calcul et une discrétisation fine du brasseur se fera au détriment de la prise en compte d'éventuels équipements sous test. De plus, la méconnaissance des valeurs réelles de certains paramètres, tels que la conductivité des parois, rendent problématique une modélisation réaliste de ce moyen d'essai.

Depuis quelques années, des travaux de recherche sont consacrés à l'élaboration de modèles probabilistes pour la représentation du champ électromagnétique dans une cavité, la simulation numérique de certaines configurations trop complexes par des codes déterministes conduisant à des temps de calcul prohibitifs, en particulier lorsque l'on introduit un équipement dans la CRBM. Des développements théoriques ont été réalisés pour déterminer un modèle probabiliste du champ électromagnétique dans la CRBM [16, 17]. Deux types d'approches sont utilisés : l'approche modale et l'approche intégrale.

Dans l'approche modale, la CRBM est considérée comme une cavité complexe avec une expression du champ électrique dépendant des différents modes de résonance excités dans la cavité. Par exemple, C.Fiachetti, dans sa thèse [14], propose un modèle probabiliste du champ électrique sous la forme d'un développement modal qui prend en compte l'influence des parois de la CRBM. Cette approche a permis d'établir un lien entre la propriété d'isotropie du champ électrique et les contraintes imposées par les parois de la cavité. Hormis, l'analyse du couplage sur un équipement électronique en CRBM, le modèle probabiliste proposé permet également de retrouver la structure modale du champ électrique en CRBM vide pour chaque position de brasseur. Cependant, la représentation analytique de ce champ électrique est complexe pour ce type de développement [10].

Le modèle probabiliste proposé par Hill [15] est, quant à lui, basé sur une représentation du champ électromagnétique en CRBM en une somme d'ondes planes d'incidence et de polarisation aléatoires. Il a pu ainsi proposer un modèle probabiliste pour les parties réelles et imaginaires des composantes du champ électromagnétique. Les propriétés d'homogénéité et d'isotropie du champ électrique déterminées par la suite ont permis de déterminer un modèle du champ total.

Cependant, ce modèle s'applique à une CRBM idéale et ne prend pas en compte les imperfections d'une CRBM réelle, d'où la nécessité de vérifier ces différentes hypothèses en CRBM réelle.

L'ensemble de ces travaux publiés récemment suscite un réel intérêt dans la communauté scientifique de l'électromagnétisme pour cette approche probabiliste et nous avons choisi de l'adapter à l'analyse de l'environnement dans des structures fermées.

Dans ce chapitre, nous nous appuyerons sur les résultats des travaux de Hill [15] afin de vérifier, à partir des mesures en CRBM, les hypothèses relatives aux lois de probabilité des grandeurs électromagnétiques. La fréquence minimale d'utilisation de la CRBM sera alors déterminée à l'aide de tests statistiques. Les différentes hypothèses de Hill [15] seront adoptées à partir de cette fréquence afin d'étudier l'immunité de systèmes électriques ne modifiant pas l'environnement électromagnétique en CRBM.

1.2 Sur la détermination de la fréquence minimale d'utilisation des CRBM par des tests statistiques

1.2.1 Principe général de fonctionnement d'une CRBM

L'environnement électromagnétique dans le volume d'essai d'une CRBM est caractérisé par un champ homogène, isotrope et à polarisation aléatoire ; ainsi, un équipement électronique placé en tout point de ce volume dit " utile ", est excité par un champ qui provient de toutes les directions avec la même intensité. Pour un fonctionnement " idéal " de la CRBM, la norme IEC 61000-4-21 recommande de limiter le volume utile à une distance supérieure à $\lambda/4$ des parois [64]. Le fonctionnement de la CRBM est basé sur les propriétés physiques des cavités électromagnétiques fonctionnant en mode surdimensionné, c'est-à-dire avec un champ exciteur de longueur d'onde bien inférieure aux dimensions : cette condition est nécessaire pour que l'enceinte adopte un comportement réverbérant.

Dans une cavité dont les parois sont considérées comme étant parfaitement conductrices, chaque mode (caractérisé par les entiers m, n, p) n'est excité que pour une seule et unique fréquence qui dépend des dimensions de la cavité. Si les trois dimensions de la chambre sont a, b et d , et la vitesse de la lumière c , les fréquences de résonance sont alors données par :

$$f_{m,n,p} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{d}\right)^2} \quad (1.1)$$

Pour la CRBM du LASMEA, de dimensions égales à $8,40m \times 6,70m \times 3,50m$, la première fréquence de résonance f_0 qui correspond au mode fondamental $m = 1, n = 1, p = 0$ est égale à $28MHz$. Le champ dans la cavité idéale (sans pertes) correspond à un spectre de raies, chacune représentant un mode de résonance de type transverse électrique (TE) ou transverse magnétique (TM), les composantes du champ électromagnétique étant déterminées par les conditions aux limites au niveau des parois de la cavité.

Dans une CRBM réelle, la présence de pertes (conductivité non parfaite des parois, ouvertures éventuelles, câbles, équipements sous test, antenne source, ...) a pour effet d'augmenter la largeur de bande de la fréquence d'excitation. La probabilité d'exciter simultanément plusieurs modes de résonance est alors plus élevée (ils sont nommés " modes contributeurs ") ; le champ électromagnétique généré correspond alors à la superposition des champs créés pour chacun de ces modes (Fig. 1.1).

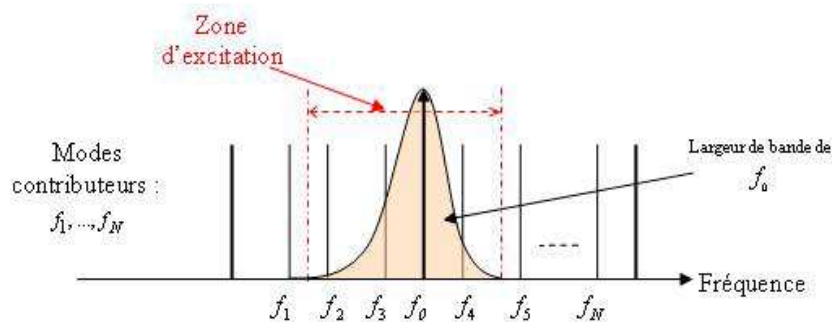


FIG. 1.1 – Recouvrement des modes excités

Lorsque la densité de modes excités dans la cavité est suffisante, l'objectif du brassage de modes sera alors :

- de conduire à la génération d'un champ électromagnétique statistiquement homogène et isotrope.
- d'obtenir un champ d'amplitude suffisante, c'est-à-dire de recouvrir les fréquences de résonance, celles-ci étant modifiées d'une position à l'autre du brasseur.

En effet, le fait d'introduire, à l'intérieur de la CRBM, un brasseur correspondant à un système métallique de grandes dimensions par rapport à la longueur d'onde provoque une modification des conditions aux limites, entraînant un déplacement des fréquences propres de résonance et la création de nouveaux modes. Par conséquent, lors d'une rotation, chaque position du brasseur est associée à un environnement électromagnétique spécifique.

A chaque cavité est associé un coefficient de qualité qui est un paramètre dépendant de la fréquence et pouvant être assimilé au coefficient de surtension des circuits résonnants. Il permet de définir la puissance nécessaire pour obtenir un niveau élevé du champ électrique dans le volume utile, et représente un élément essentiel pour la caractérisation des pertes de la cavité. Le coefficient de qualité est un paramètre déterminant pour évaluer la performance d'une CRBM.

Les propriétés d'homogénéité et d'isotropie du champ électromagnétique dans une CRBM idéale sont issues du modèle de Hill [15] dont nous rappelons les éléments essentiels dans le paragraphe suivant.

1.2.2 CRBM idéale : Représentation intégrale de Hill

Le modèle de Hill [15] s'applique à une CRBM idéale et est basé sur une représentation analytique du champ électrique qui s'écrit, pour chaque fréquence, comme la superposition intégrale d'ondes planes :

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \int_{\Omega=0}^{4\pi} \mathbf{IE}(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \quad (1.2)$$

Chaque onde plane est donnée par :

$$\mathbf{IE}(\mathbf{r}, \Omega) = \mathbf{F}(\Omega) e^{j\mathbf{k}(\Omega) \cdot \vec{r}} \quad (1.3)$$

où :

- \vec{r} est le rayon position du point générique \mathbf{r} du champ électromagnétique sur une sphère de rayon unité (S)
- $\mathbf{F}(\Omega)$ est le vecteur polarisation
- Ω représente l'angle solide
- $\mathbf{k}(\Omega)$ est le vecteur d'onde dans la direction de propagation \mathbf{u}_r

Pour chaque direction, Ω correspondant à la réalisation de la polarisation associée \mathbf{F} est fixée, et :

$$\begin{cases} \mathbf{F}(\Omega) &= \mathbf{F}_\theta(\Omega) \mathbf{u}_\theta + \mathbf{F}_\varphi(\Omega) \mathbf{u}_\varphi \\ \mathbf{F}_\theta(\Omega) &= \mathbf{F}_\theta^R(\Omega) + j\mathbf{F}_\theta^I(\Omega) \\ \mathbf{F}_\varphi(\Omega) &= \mathbf{F}_\varphi^R(\Omega) + j\mathbf{F}_\varphi^I(\Omega) \end{cases} \quad (1.4)$$

où $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\varphi)$ est la base orthonormée sphérique de l'espace vectoriel.

Le modèle permet de considérer une infinité d'ondes planes aléatoires de polarisation identiquement distribuée sur une sphère de rayon unité (\mathcal{S}).

• Isotropie du champ électromagnétique interne à la cavité

Les parties réelles et imaginaires ($\mathbf{F}_\theta^R, \mathbf{F}_\varphi^R, \mathbf{F}_\theta^I, \mathbf{F}_\varphi^I$) de la polarisation \mathbf{F} sont supposées indépendantes et suivent la même loi normale $\mathcal{N}(0, s^2)$. Chaque onde plane étant affectée du même poids, le champ est isotrope.

• Homogénéité du champ électromagnétique interne à la cavité

Les propriétés des parties réelles et imaginaires des différentes ondes planes (indépendance et $\mathcal{N}(0, s^2)$) permettent de démontrer que, sur la surface de (\mathcal{S}), la moyenne du champ est nulle et que sa variance est indépendante du point considéré. De là, découle la propriété d'homogénéité du champ électromagnétique dans une CRBM idéale.

Pour chaque fréquence, et en chaque point du volume utile de la CRBM, le champ électromagnétique s'identifie à une variable aléatoire. Des réalisations de cette variable aléatoire peuvent être obtenues expérimentalement en mesurant à chaque pas de brasseur et au point considéré du volume utile, les valeurs des composantes du champ électrique.

Le modèle de Hill [15] s'applique au champ électromagnétique généré dans une CRBM idéale. Dans le cas d'une CRBM réelle, la vérification des propriétés des grandeurs électromagnétiques internes au volume utile peut être réalisée par comparaison des lois de probabilité expérimentale et théorique. Pour ce faire, nous utiliserons dans le paragraphe suivant, des tests statistiques adaptés au type de données obtenues dans la CRBM du LASMEA.

Il est à noter que l'incertitude sur les valeurs mesurées n'est pas uniquement due aux imperfections de la CRBM. La précision des instruments de mesure peut également y contribuer [26].

1.2.3 Application de tests statistiques pour l'analyse des CRBM

Les tests statistiques d'hypothèses sont des outils qui permettent le rejet ou le non-rejet des différentes hypothèses relatives au champ électromagnétique en CRBM réelle. Cependant, tous les tests d'hypothèses ne peuvent pas être appliqués à la comparaison des lois de probabilité théorique et expérimentale des grandeurs électromagnétiques générées en CRBM. Dans ce paragraphe, nous présentons une description des différents tests susceptibles d'apporter des informations dans le cadre de la caractérisation de la CRBM.

L'application de tests statistiques requiert, cependant, un certain nombre de données expérimentales devant être indépendantes, cette propriété étant liée à l'efficacité du brassage.

1.2.3.1 Acquisition des données : critère de non corrélation

L'efficacité de brassage est fondamentale pour le fonctionnement correct d'une CRBM. La rotation du brasseur est efficace pour le " mélange " des modes si la densité de modes est suffisamment élevée à la fréquence considérée, cette propriété étant vérifiée aux hautes fréquences. Il suffit, dans ces conditions, de modifier la position du brasseur d'un angle de valeur faible pour obtenir une structure du champ électromagnétique indépendante de la précédente. En revanche, aux basses fréquences, les fréquences correspondant à deux modes propres consécutifs sont plus espacées. Pour modifier la structure du champ électromagnétique, il est donc nécessaire d'imposer un angle de rotation du brasseur plus important. Un nombre élevé de configurations indépendantes du champ électromagnétique pendant une rotation du brasseur, est donc une indication d'un brassage efficace.

Le coefficient de corrélation est un paramètre statistique utile qui donne le degré de dépendance de deux variables aléatoires. Pour évaluer le lien entre les environnements électromagnétiques dans la CRBM pendant une rotation du brasseur, le coefficient de corrélation est déterminé à partir des réalisations de l'échantillon. La performance du brasseur est caractérisée, pour chaque fréquence et en un point donné du volume utile, par l'estimée du coefficient de corrélation entre l'ensemble des réalisations relatives à un nombre N de positions du brasseur et le même ensemble décalé d'un rang. Un tel coefficient s'obtient par :

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^N \left(\dot{x}_i - \ll \|\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r})\| \gg_N \right) \left(\dot{y}_i - \ll \|\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r})\| \gg_N \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\dot{x}_i - \ll \|\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r})\| \gg_N \right)^2 \sum_{i=1}^N \left(\dot{y}_i - \ll \|\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r})\| \gg_N \right)^2}} \quad (1.5)$$

où les $(\dot{x})_{i,...,N}$ sont les réalisations du module du champ électrique total et les $(\dot{y})_{i,...,N}$ correspondent aux mêmes réalisations après une permutation circulaire.

$\ll \|\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r})\| \gg_N$ est la moyenne du module du champ électrique total sur N positions du brasseur.

Le critère de " non corrélation " de deux échantillons est [4] :

$$\rho_j < \frac{1}{e} \quad (1.6)$$

L'indice j correspond à l'échantillon relatif à une position du brasseur.

Pour, par exemple, 500 échantillons sur 360° de rotation, deux échantillons consécutifs correspondent donc à un angle de 0.72° . L'angle minimal de rotation du brasseur, pour obtenir deux échantillons consécutifs " non corrélés ", est celui à partir duquel le coefficient de corrélation devient inférieur à $1/e$. Il est également appelé angle de " non-corrélation ".

La figure 1.2 représente la variation de l'angle de " non corrélation " pour la CRBM du LASMEA.

En dessous de 200MHz , le nombre d'échantillons non corrélés est donc très faible, l'angle de rotation du brasseur devant être très élevé. L'insuffisance d'échantillons qui en découle rend l'application de tests statistiques très difficile voire impossible comme nous le verrons par la suite. En revanche, au dessus de 200MHz , l'angle moyen de rotation du brasseur est approximativement de 5° d'où un nombre plus élevé d'échantillons "non corrélés".

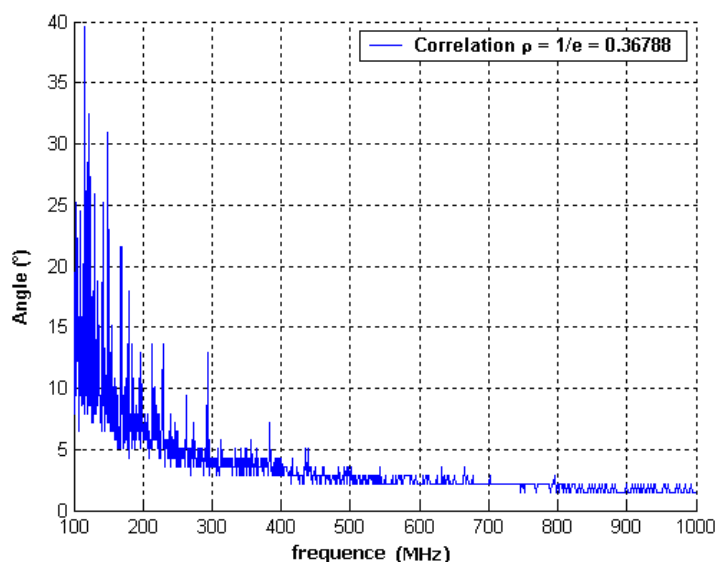


FIG. 1.2 – Angle de rotation du brasseur pour avoir des réalisations " non corrélées " selon la norme IEC 61000-4-21

Rigoureusement, pour pouvoir affirmer que deux échantillons sont non corrélés, leur coefficient de corrélation doit être nul. Rappelons par ailleurs que deux échantillons non corrélés ne sont pas nécessairement indépendants.

Cependant, ce critère de " non-corrélation " sera utilisé pour l'acquisition des différents échantillons nécessaires aux différents tests appliqués à la CRBM.

1.2.3.2 Tests d'adéquation de lois théoriques appliqués à la caractérisation des CRBM

L'application, en CRBM réelle, de tests d'adéquation de lois théoriques permet de vérifier le rejet ou le non-rejet des différentes densités de probabilité théoriques concernant le champ électromagnétique en CRBM réelle, à savoir la loi de Rayleigh d'ordre 2 pour les modules des composantes de ce champ et la loi de Rayleigh d'ordre 6 pour le module du champ total. En effet, les parties réelles et imaginaires du champ électrique étant supposées indépendantes et suivre la même loi normale $\mathcal{N}(0, s^2)$, théoriquement, les modules des composantes du champ électrique suivent une loi de Rayleigh d'ordre 2 à facteur d'échelle s tandis que le module du champ électrique total suit une loi de Rayleigh d'ordre 6 à facteur d'échelle s (cf. annexe B).

Le test d'adéquation habituellement utilisé dans le cadre de la caractérisation de la CRBM est le test de Kolmogorov-Smirnov (test de KS) en raison de sa simplicité et de son efficacité. Ce test présente un autre avantage qui est celui d'utiliser l'ensemble de l'information contenue dans les échantillons. Cependant, il ne peut pas être utilisé en tant que test d'adéquation à des lois théoriques de paramètres inconnus.

Disposant de 500 échantillons de puissance reçue sur un tour de brasseur, nous nous proposons de déterminer la fréquence limite d'utilisation de la CRBM par application, dans un premier temps, du test d'adéquation du KS. Une manière pratique de remédier à l'inconvénient précédemment cité est de normaliser la puissance reçue P_r mesurée par une antenne placée dans le volume utile d'une CRBM, à sa valeur moyenne $\ll P_r \gg_N$ obtenue sur une révolution de brasseur :

$$P_r^{norm} = \frac{P_r}{\ll P_r \gg_N} \quad (1.7)$$

N étant le nombre de positions du brasseur. Un autre avantage de cette normalisation est de s'affranchir de la puissance injectée.

En effet, si le module du champ électrique suit une loi de Rayleigh, la fonction de répartition de la loi théorique de cette puissance normalisée P_r^{norm} s'écrit [26] :

$$F_{P_r^{norm}}^0 = 1 - \exp(-x) \quad (1.8)$$

et ne requiert pas la connaissance de paramètres tels que la moyenne et l'écart-type.

Si $F_{P_r^{norm}}(x)$ représente les fréquences cumulées d'un échantillon d'effectif N de P_r^{norm} , les hypothèses à tester sont les suivantes :

- H_0 : les valeurs observées de P_r^{norm} proviennent de la population décrite par $F_{P_r^{norm}}^0(x)$. H_0 est l'hypothèse à laquelle on croit ou celle qui permet de faire des calculs ou encore celle dont le rejet est lourd de conséquences.
- H_1 : H_0 est fausse ; il s'agit de l'hypothèse alternative à H_0 .

La divergence entre $F_{P_r^{norm}}^0(x)$ et $F_{P_r^{norm}}(x)$ est caractérisée par le plus grand des écarts observés Dis (i.e. la fonction discriminante du test), soit :

$$Dis = \max |F_{P_r^{norm}}(x) - F_{P_r^{norm}}^0(x)| \quad (1.9)$$

Le risque d'erreur de première espèce est noté α et représente l'erreur qui consiste à rejeter une hypothèse vraie. Le risque d'erreur de deuxième espèce β représente, quant à elle, l'erreur commise en acceptant une hypothèse fausse.

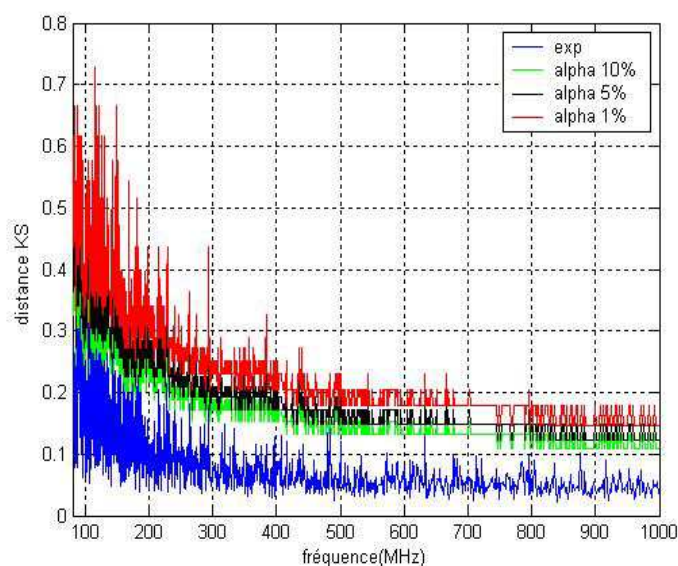
On peut alors, avec un risque α fixé à l'avance et grâce à la table de Massey [21, 22, 23], conclure si l'écart maximum entre $F_{P_r^{norm}}^0(x)$ et $F_{P_r^{norm}}(x)$ peut être imputé au hasard de l'échantillonnage ou, au contraire, est dû au fait que l'échantillon n'est pas extrait d'une population décrite par la fonction de distribution $F_{P_r^{norm}}(x)$.

Il est à noter que les tests statistiques ne nous aident qu'à rejeter une hypothèse fondamentale H_0 , mais jamais à l'accepter d'emblée (Tab. 1.1).

Réalité Décision	H_0 vraie	H_0 fausse
Non-rejet de H_0	correct	Manque de puissance Risque de seconde espèce β
Rejet de H_0	Rejet à tort Risque de première espèce α	Puissance du test $1 - \beta$

TAB. 1.1 – Critères des tests statistiques

Appliqué aux échantillons indépendants obtenus à partir des 500 mesures de la puissance reçue pour différentes fréquences au point central de la CRBM (M_{ref}), le test d'adéquation de KS donne un " non-rejet " de la loi théorique de la puissance, par conséquent celle du champ électrique, à partir de 300MHz pour $\alpha = 1\%$ (Fig. 1.3). Pour $\alpha = 5\%$ et pour l'erreur de première espèce la plus contraignante i.e. $\alpha = 10\%$, l'adéquation à la loi théorique semble être respectée à partir de cette limite malgré la présence de certaines fréquences ne respectant pas le seuil.

FIG. 1.3 – Test d'adéquation du KS appliqué à la puissance reçue normalisée à sa valeur moyenne pour différentes valeurs de l'erreur de première espèce α

Nous nous proposons, dans un second temps, de vérifier la valeur de cette fréquence limite par application d'un second test d'adéquation à savoir le test d'adéquation du χ^2 de Pearson (cf. annexe C). Ce test, contrairement à celui de KS, ne demande pas que la loi théorique soit entièrement spécifiée. Néanmoins, le test du χ^2 de Pearson nécessite, pour son application, un assez grand nombre d'observations puisque :

- aucune des classes ne doit avoir un effectif trop faible,
- le groupement par classes entraîne la perte d'une partie de l'information.

Ce test ne peut donc pas être utilisé pour la caractérisation d'une CRBM aux basses fréquences, le nombre d'échantillons " non corrélés " n'étant pas suffisant.

Appliqué aux différents échantillons de la puissance reçue normalisée à la valeur moyenne, le test d'adéquation du χ^2 conduit à une valeur de la fréquence inférieure de " non-rejet " de la loi de Rayleigh égale à 340MHz , pour une erreur de première espèce de 1% (Fig. 1.4). Cette fréquence est globalement respectée par les autres valeurs de α pour ce test d'adéquation.

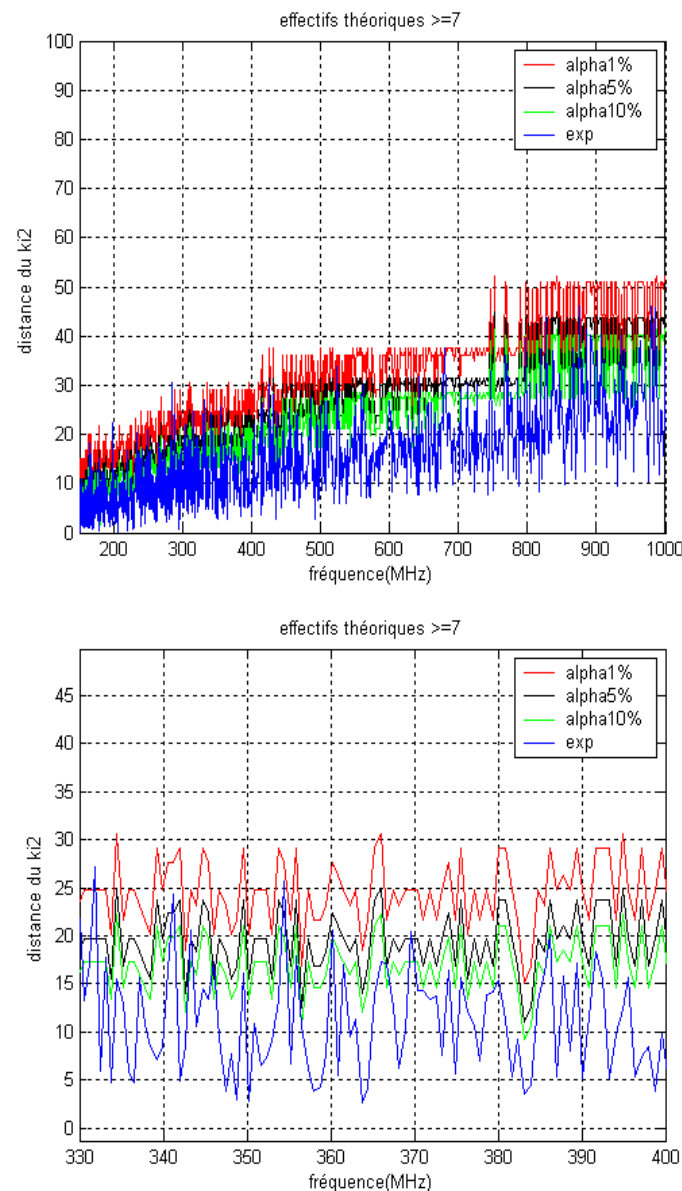


FIG. 1.4 – Test d'adéquation du χ^2 appliqué à la puissance reçue normalisée à sa valeur moyenne pour différentes valeurs de l'erreur de première espèce α

Le test du χ^2 peut être utilisé à des fins diverses. Il permet, non seulement de juger si la loi théorique $F_{P_r}^0(x)$, choisie a priori pour caractériser une répartition expérimentale $F_{P_r}^{norm}(x)$, doit être ou non rejetée, mais également de juger si :

- plusieurs échantillons statistiques proviennent ou non d'une même population : test d'homogénéité,
- deux variables aléatoires dont on connaît des réalisations peuvent ou non être considérées comme indépendantes : test d'indépendance.

Il est à noter que le principe du test d'homogénéité du χ^2 est similaire à celui du test d'indépendance. La différence réside dans les hypothèses confrontées et sur le type d'échantillon étudié.

Avec l'objectif de valider les résultats obtenus, ou encore de rechercher des informations complémentaires, ce test sera appliqué à la CRBM du LASMEA afin de préciser le domaine de fréquences où l'homogénéité du champ électrique dans le volume utile peut être " garantie ".

1.2.3.3 Test d'homogénéité du khi deux pour l'analyse comportementale d'une CRBM

La norme IEC 61000-4-21 ne préconise pas l'application d'un test spécifique au contrôle de l'homogénéité du champ : seul un test d'uniformité est proposé. Il consiste à vérifier que les écart-types des modules des composantes du champ en 8 points du volume utile ne dépassent pas un certain gabarit. Le critère d'uniformité a pour objectif de déterminer si la valeur maximale du module du champ électromagnétique peut être considérée comme " identique " en tous les points de la chambre et suivant toutes les directions sur un tour de brasseur, aux incertitudes de mesures près. Notons ici que dans le cas de la CRBM du LASMEA, le critère proposé par la norme est respecté dès 80 MHz.

Statistiquement, l'une des conditions nécessaires à l'homogénéité d'un champ aléatoire est l'obtention d'une moyenne constante en tout point de l'espace. Il a donc été nécessaire de procéder à des mesures supplémentaires en 80 points internes au volume utile, l'application du test d'homogénéité du χ^2 nécessitant un nombre important de données expérimentales. Les positions des extrémités et du centre du volume utile considéré sont données dans le tableau 1.2 :

Points	X(m)	Y(m)	Z(m)
P1	1.25	0.75	1.46
P2	1.25	3.90	1.46
P3	5.45	0.75	1.46
P4	5.45	3.90	1.46
P5	1.25	0.75	2.06
P6	1.25	3.90	2.06
P7	5.45	0.75	2.06
P8	5.45	3.90	2.06
P9	3.35	2.32	1.76

TAB. 1.2 – Coordonnées des points délimitant le volume utile de la CRBM

Les points de mesure sont uniformément séparés dans chaque direction pour un total de 4, 4 et 5 points sur les axes rectangulaires 0x, 0y, 0z respectivement (Fig. 1.5).

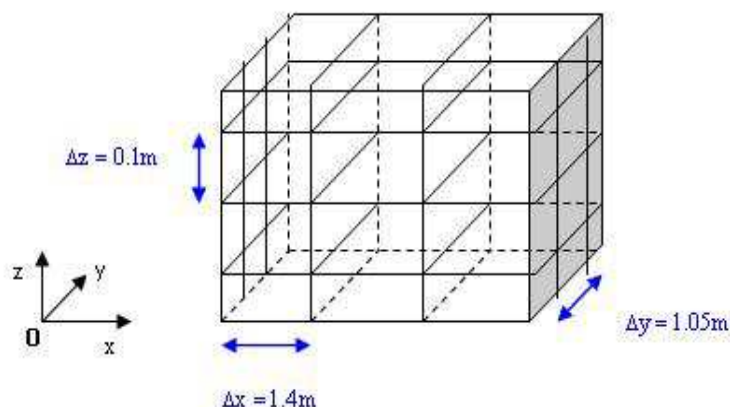


FIG. 1.5 – Emplacement des points de mesure du champ électrique dans le volume utile de la CRBM du LASMEA

Des mesures du module des composantes rectangulaires du champ électrique ont été réalisées en chaque point, dans la gamme de fréquences ($[250\text{MHz} - 1\text{GHz}]$) pour 51 positions du brasseur, soit un pas angulaire de 7° . Cependant, les imperfections de la CRBM et les incertitudes sur les mesures font que la moyenne du module du champ électrique ne peut pas être identique pour tous les points (Fig. 1.6), y compris pour les fréquences où la densité de modes est très importante et où, a priori, le comportement de la CRBM réelle tend vers celui de la CRBM idéale.

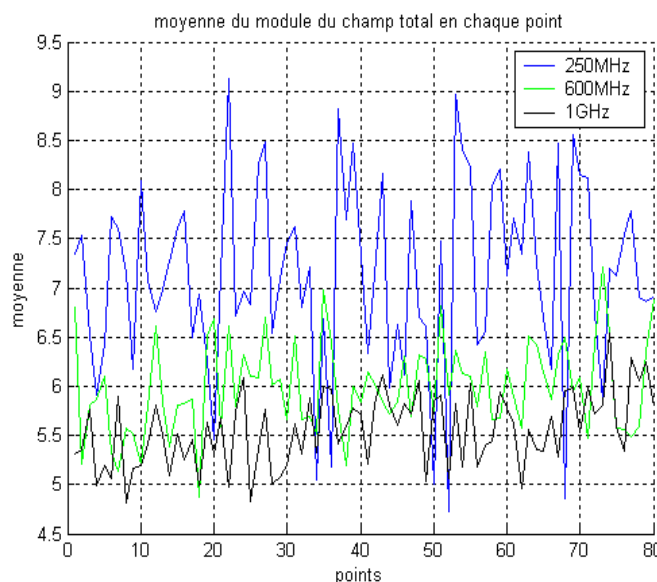


FIG. 1.6 – Moyenne du module du champ total en 80 points du volume utile

Le test d'homogénéité du χ^2 appliqué à la CRBM peut apporter des informations sur l'homogénéité du champ électromagnétique. Les hypothèses à tester sont les suivantes :

- H_0 : La variable $\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r})$, représentant le module du champ total, se distribue de la même façon

dans chacune des 80 populations de référence (i.e. 80 points).

- $H_1 : H_0$ est fausse.

Le test est appliqué, à chaque fréquence, entre les différents couples de points $(M_{ref}, M_j)_{j=1,\dots,79}$, M_{ref} étant le point situé au centre du volume utile (Fig. 1.7).

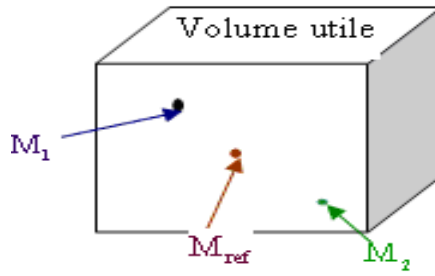


FIG. 1.7 – Principe d'application du test d'homogénéité

Sur la Fig. 1.8, est représenté le pourcentage de tests (sur un total de 79 tests effectués pour chaque fréquence) pour lesquels nous observons un non-respect de la distance du χ^2 .

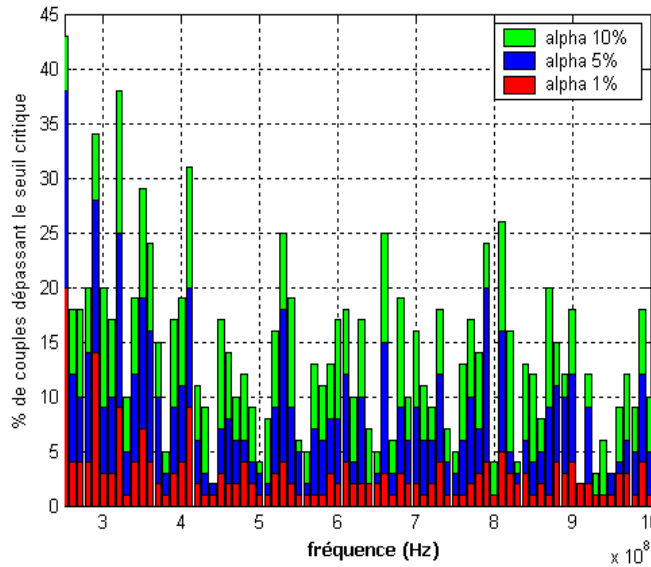


FIG. 1.8 – Pourcentage de couples de points (sur un total de 79) dépassant le seuil critique

A partir de 340MHz , 20% des couples de points considérés sont inférieurs au seuil critique pour une erreur de première espèce de 5%. Ainsi, la tendance obtenue avec les tests d'adéquation de KS et du χ^2 se confirme par le test d'homogénéité : le modèle probabiliste du champ défini par Hill [15] présente ainsi des limites en-dessous de quelques centaines de MHz .

Nous admettons donc qu'en dessous de cette fréquence, il est nécessaire d'analyser le comportement électromagnétique afin d'établir un modèle de champ représentatif du fonctionnement de la CRBM.

1.2.4 Limitation en fréquence des études probabilistes

Dans une cavité, en l'absence du brasseur de modes, on peut identifier trois zones de fréquences (Fig. 1.9) :

- la première où aucun, ou peu de modes sont excités,
- la deuxième (zone de transition) correspondant à un nombre de modes suffisamment élevé pour que l'introduction d'un brasseur de modes soit efficace sur les propriétés du champ électromagnétique, interne à la cavité,
- le nombre de modes excités dans la troisième zone est suffisamment important pour que la présence du brasseur soit pratiquement inutile.

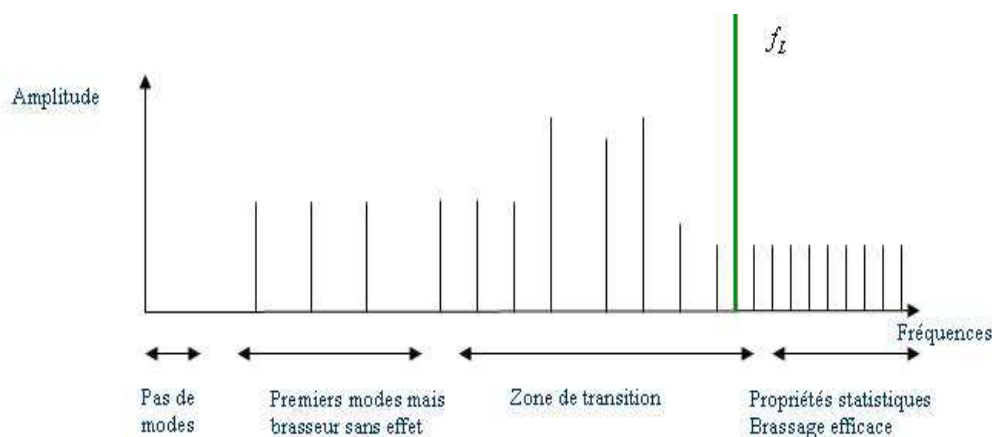


FIG. 1.9 – Illustration des différentes zones de fonctionnement d'une cavité

Dans la première zone, même en présence du brasseur, la cartographie du champ est quasiment la même pour une rotation faible (2°) de celui-ci tandis qu'aux plus hautes fréquences, les influences de la densité de modes et du brasseur sont perceptibles sur la cartographie du champ (Fig. 1.10).

Pour modifier la structure du champ, il est donc nécessaire d'imposer un angle de rotation du brasseur plus important et par conséquent un nombre d'échantillons " non corrélés " plus faible. A 110MHz par exemple où l'angle de non corrélation est de 24.5° , seuls 14 échantillons " non-corrélés " peuvent être obtenus. L'analyse probabiliste du champ électromagnétique en basses fréquences est impossible à réaliser en raison de cette insuffisance de données.

D'autre part, les propriétés d'homogénéité du champ n'étant pas valables à ces fréquences, il nous est impossible de simuler des trajectoires du champ (cf. annexe D) pour pallier le problème de manque d'échantillons.

L'étude décrite dans le paragraphe suivant, relative à l'immunité de systèmes électroniques en CRBM, se limitera donc aux hautes fréquences soit aux fréquences supérieures à la fréquence f_{lim} pour lesquelles les hypothèses de Hill [15] seront considérées comme légitimes.

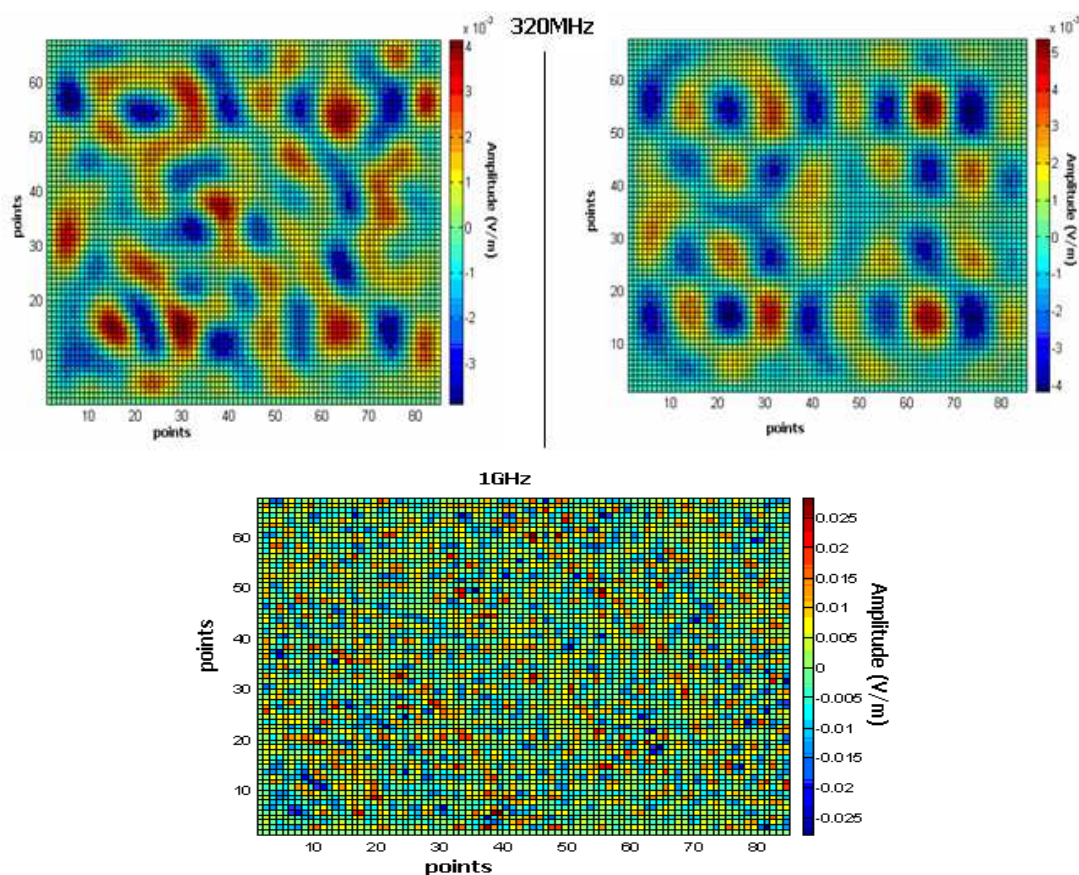


FIG. 1.10 – Cartographie du module du champ total à 320 MHz et 1 GHz

1.3 Etude de l'immunité de systèmes électroniques

1.3.1 Approche probabiliste pour le calcul du courant induit en sortie d'une ligne de transmission

En phase de conception, l'intérêt de la simulation numérique de systèmes complexes dans l'optique de résoudre un problème de compatibilité électromagnétique (CEM) n'est plus à démontrer. Un autre aspect important est la modélisation des moyens d'essais dont l'objectif est la génération d'un environnement électromagnétique ; sa maîtrise conditionne l'analyse de la sûreté de fonctionnement des systèmes électroniques. Parmi ces moyens d'essais, les avantages de la CRBM ne sont plus à démontrer. Cependant, un certain nombre d'interrogations subsistent au niveau des protocoles de mesures tant au niveau de la phase de calibrage qu'au niveau des essais en immunité et, surtout, en émission.

En CRBM, l'équipement se trouve immergé dans un environnement électromagnétique d'incidence et de polarisation aléatoires. Dans le but d'éviter la simulation de l'ensemble moyen d'essai / équipement sous test pour l'étude du comportement du système sous test, l'approche proposée consiste à utiliser les lois de distribution des grandeurs électromagnétiques générées dans la CRBM à partir des données expérimentales ou théoriques. Hormis l'éviction de la simulation de la structure entière, cette approche permet l'obtention d'une meilleure précision dans la simulation de la source de perturbation caractérisée par la

loi de distribution du champ électrique.

Des recherches [26] fondées sur les travaux de Hill [15] et montrant que le champ électromagnétique généré en CRBM peut être considéré comme une somme d'ondes planes, ont été menées. Les résultats obtenus par Lucas Musso ont montré que le courant induit à l'extrémité d'une ligne de transmission sans pertes en CRBM correspond à la valeur obtenue dans le cas d'un champ externe correspondant à la superposition de vingt ondes planes de polarisation et d'incidence aléatoires.

La méthode proposée ici est basée sur la prise en compte des lois de probabilité des composantes du champ. Cette approche utilise le formalisme d'Agrawal pour l'évaluation des courants et tensions induits sur une ligne de transmission à deux conducteurs, illuminée par une onde plane.

1.3.1.1 Equations de couplage d'une ligne de transmission avec un champ électromagnétique externe

Considérons un conducteur sans pertes de longueur L et de hauteur h , fermé sur deux impédances Z_1 et Z_2 , situé au-dessus d'un plan de masse et illuminé par une onde plane caractérisée par le champ électromagnétique $(\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}), \hat{\mathbf{B}}(f; \mathbf{r})) = (\hat{\mathbf{E}}(f; x, y, z), \hat{\mathbf{B}}(f; x, y, z))$, (x, y, z) étant les coordonnées cartésiennes du point \mathbf{r} (Fig. 1.11).

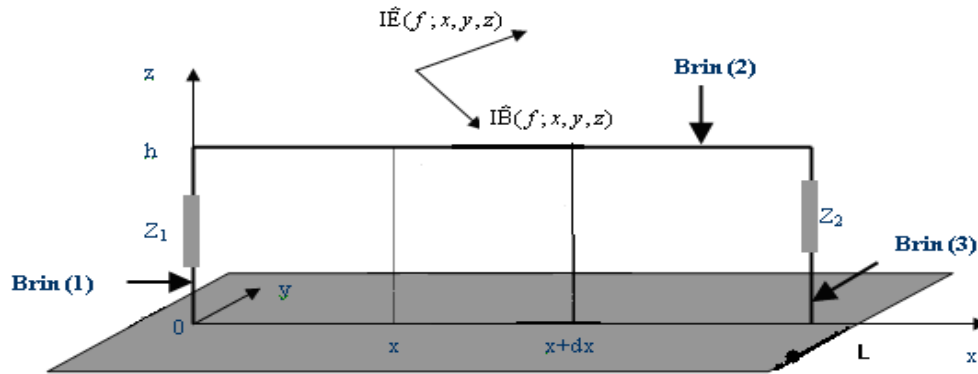


FIG. 1.11 – Conducteur sans pertes

D'après le formalisme d'Agrawal, le courant induit à l'extrémité L de la ligne d'impédance caractéristique Z_c , est solution de :

$$I_s(f) = \frac{1}{(e^{\gamma L} - \kappa_1 \kappa_2 e^{-\gamma L})} \left[\frac{2Z_c}{(Z_1 + Z_c)(Z_2 + Z_c)} \int_0^h \hat{\mathbf{E}}_z(f; 0, 0, z) dz - \frac{1}{Z_2 + Z_c} (e^{\gamma L} - \kappa_1 e^{-\gamma L}) \int_0^h \hat{\mathbf{E}}_z(f; L, 0, z) dz + \frac{1}{Z_2 + Z_c} \left(\int_0^L e^{\gamma \tau} \hat{\mathbf{E}}_x(f; \tau, 0, h) d\tau - \kappa_1 \int_0^L e^{-\gamma \tau} \hat{\mathbf{E}}_x(f; \tau, 0, h) d\tau \right) \right] \quad (1.10)$$

avec :

$-\gamma$: l'exposant linéique de propagation lié aux paramètres linéiques $\mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{c}, \mathbf{g}$ de la ligne de transmission :

$$\gamma = \sqrt{(\mathbf{r} + j\omega \mathbf{l})(\mathbf{g} + j\omega \mathbf{c})} \quad (1.11)$$

$-\kappa_1$ et κ_2 : les coefficients de réflexion en entrée et en sortie de ligne.

$-\hat{\mathbf{E}}_x, \hat{\mathbf{E}}_y, \hat{\mathbf{E}}_z$: les composantes de $\hat{\mathbf{E}}$ dans la base orthonormée associée au repère cartésien $\mathcal{R} = (0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

1.3.1.2 Loi de probabilité du courant induit en sortie de la ligne de transmission

Dans la mesure où le champ électrique exciteur de la ligne correspond au champ généré au sein du volume utile de la CRBM et où le conducteur ne modifie pas l'environnement électromagnétique de la CRBM, la source peut être considérée comme étant statistiquement homogène et isotrope sur un tour de brasseur.

En un point \mathbf{r} du volume utile, on a :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_x(f; \mathbf{r}) \gg_N = \ll \hat{\mathbf{E}}_y(f; \mathbf{r}) \gg_N = \ll \hat{\mathbf{E}}_z(f; \mathbf{r}) \gg_N \quad (1.12)$$

et en deux points de coordonnées \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}_1) \gg_N = \ll \hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}_2) \gg_N, p \in \{x, y, z\} \quad (1.13)$$

où N est le nombre de positions du brasseur.

Autrement dit, la moyenne des composantes verticale et longitudinale du champ électrique externe est indépendante de la position. Par suite, les deux premières intégrales intervenant dans l'expression du courant peuvent être approchées par :

$$\begin{aligned} \int_0^h \hat{\mathbf{E}}_z(f; 0, 0, z) dz &\approx h \hat{\mathbf{E}}_z(f; 0, 0, h) \\ \int_0^h \hat{\mathbf{E}}_z(f; L, 0, z) dz &\approx h \hat{\mathbf{E}}_z(f; L, 0, h) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Soit :

$\hat{\mathbf{E}}_z^R(f; 0, 0, h)$, $\hat{\mathbf{E}}_z^R(f; L, 0, h)$, $\hat{\mathbf{E}}_x^R(f; \tau, 0, h)$ et $\hat{\mathbf{E}}_z^I(f; 0, 0, h)$, $\hat{\mathbf{E}}_z^I(f; L, 0, h)$, $\hat{\mathbf{E}}_x^I(f; \tau, 0, h)$ les parties réelles et imaginaires des champs électriques $\hat{\mathbf{E}}_z(f; 0, 0, h)$, $\hat{\mathbf{E}}_z(f; L, 0, h)$ et $\hat{\mathbf{E}}_x(f; \tau, 0, h)$ respectivement.

Après quelques développements de l'équation (1.10), on obtient :

$$I_s(f) = \Re[I_s(f)] + \Im[I_s(f)]$$

avec :

$$\begin{aligned} \Re[I_s(f)] = & \left(a_1 \hat{\mathbf{E}}_z^R(f; 0, 0, h) - b_1 \hat{\mathbf{E}}_z^I(f; 0, 0, h) + a_3 \hat{\mathbf{E}}_z^R(f; L, 0, h) \right. \\ & \left. - b_2 \hat{\mathbf{E}}_z^I(f; L, 0, h) + a_3 \hat{\mathbf{E}}_x^R(f; \tau, 0, h) - b_3 \hat{\mathbf{E}}_x^I(f; \tau, 0, h) \right) \end{aligned} \quad (1.15a)$$

$$\begin{aligned} \Im[I_s(f)] = & \left(a_1 \hat{\mathbf{E}}_z^I(f; 0, 0, h) + b_1 \hat{\mathbf{E}}_z^R(f; 0, 0, h) + a_2 \hat{\mathbf{E}}_z^R(f; L, 0, h) \right. \\ & \left. + b_2 \hat{\mathbf{E}}_z^R(f; L, 0, h) + a_3 \hat{\mathbf{E}}_x^I(f; \tau, 0, h) + b_3 \hat{\mathbf{E}}_x^R(f; \tau, 0, h) \right) \end{aligned} \quad (1.15b)$$

où a_i et b_i ($i = 1, 2, 3$) correspondent respectivement aux parties réelles et imaginaires des coefficients des composantes cartésiennes du champ électrique.

Hill [15] considère que les parties réelles et imaginaires des composantes rectangulaires du champ électrique sont indépendantes, à distribution normale, à valeur moyenne nulle et à écarts types égaux (s). Or, toute combinaison linéaire de variables aléatoires gaussiennes est une variable aléatoire gaussienne. Par suite, $\Re[I_s(f)]$ et $\Im[I_s(f)]$ sont à distribution normale $\mathcal{N}(\ll \Re[I_s(f)] \gg, s_{\Re[I_s(f)]}^2)$ et $\mathcal{N}(\ll \Im[I_s(f)] \gg, s_{\Im[I_s(f)]}^2)$.

Après développement et en tenant compte de l'indépendance des variables gaussiennes, nous en déduisons que $\Re[I_s(f)]$ et $\Im[I_s(f)]$ sont des variables aléatoires gaussiennes, centrées, non corrélées, donc indépendantes et de même variance $s_{I_s(f)}^2$. Nous obtenons ainsi :

$$s_{I_s(f)}^2 = s^2(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + a_3^2 + b_3^2) \quad (1.16)$$

Par suite, le module du courant $\| I_s(f) \|$ s'écrit :

$$\| I_s(f) \| = s_{I_s(f)} \| \overset{\circ}{G} \| = s_{I_s(f)} \sqrt{\overset{\circ}{G}_1^2 + \overset{\circ}{G}_2^2} \quad (1.17)$$

où $\overset{\circ}{G} = (\overset{\circ}{G}_1, \overset{\circ}{G}_2)$ est une variable aléatoire gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

Il en résulte que $\| I_s(f) \|$ suit une loi de Rayleigh d'ordre 2 (Fig. 1.12) et de paramètre $s_{I_s(f)}$. Elle a donc pour densité de probabilité, moyenne et écart-type :

$$\begin{aligned} P_{\| I_s(f) \|}^0(x) &= \frac{x}{s_{I_s(f)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s_{I_s(f)}^2}\right) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ \ll \| I_s(f) \| \gg &= s_{I_s(f)} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ s_{\| I_s(f) \|} &= s_{I_s(f)} \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Observons que, d'après un résultat bien connu du calcul des probabilités, l'Eq.1.17 peut encore s'écrire :

$$\| I_s(f) \| = s_{I_s(f)} \sqrt{-2 \ln U} \quad (1.19)$$

où U est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$.

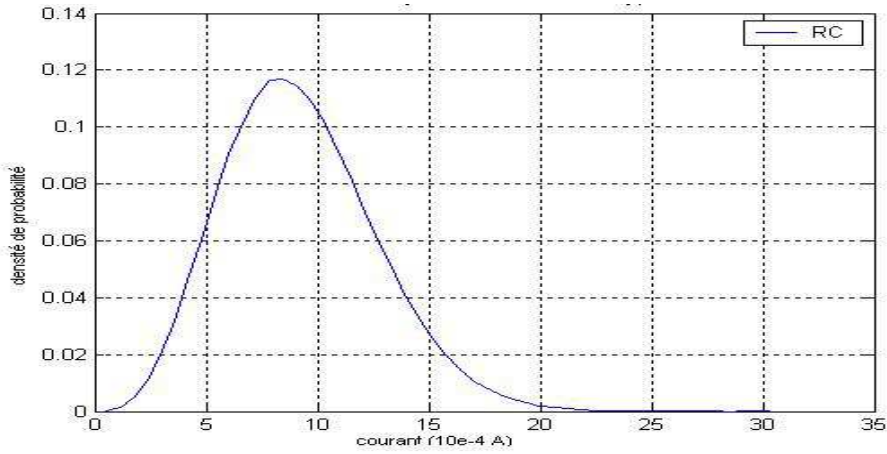
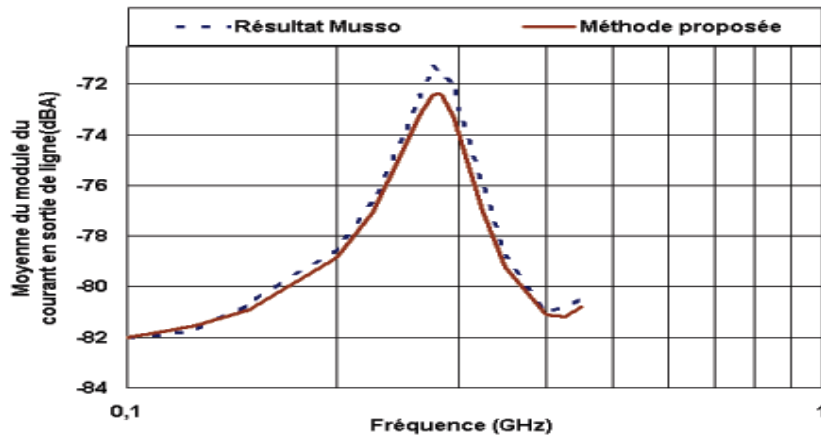


FIG. 1.12 – Densité de probabilité du courant d'extrémité

1.3.1.3 Evaluation de la moyenne du courant induit en sortie de la ligne de transmission

Afin de valider cette approche probabiliste nous avons considéré une ligne de transmission de paramètres identiques à ceux de la configuration étudiée par Lucas Musso dans sa thèse, à savoir une ligne sans pertes située au-dessus d'un plan de masse parfaitement conducteur, de longueur $L = 50\text{cm}$ et de hauteur $h = 3\text{cm}$. Ses résultats ont été obtenus en considérant que la source représentative de l'environnement électromagnétique en CRBM correspond à un nombre fini d'ondes planes de polarisation et d'incidence aléatoires. A partir des simulations de Monte-Carlo réalisées dans [26], dont les résultats ont été validés par comparaison avec des mesures en CRBM, nous avons pu estimer l'écart-type $s_{I_s(f)}$ des parties réelle et imaginaire de $I_s(f)$. Les caractéristiques du champ de calibrage n'ayant pas été précisées dans [26], seule la valeur de la moyenne $\ll \| I_s(f) \| \gg$ de $\| I_s(f) \|$ a pu être identifiée.

Les résultats obtenus sont présentés Fig. 1.13 où sont comparées, dans les mêmes conditions que dans [26], les valeurs de $\ll \| I_s(f) \| \gg$ déduites de simulations de Monte-Carlo à celles évaluées par notre méthode.

FIG. 1.13 – Comparaison des estimées numériques de $\ll \| I_s(f) \| \gg$ fournies par les deux méthodes

La concordance correcte des deux courbes autorise la validation de la méthode proposée, basée sur les hypothèses de Hill [15]. Le courant en sortie de la ligne de transmission peut ainsi s'obtenir simplement à partir de la seule connaissance de l'écart-type des parties réelle et imaginaire du champ électrique de calibrage en CRBM. L'intérêt d'une telle approche, outre sa simplicité de mise en oeuvre, est de faciliter l'interprétation des mesures réalisées en CRBM.

Un second aspect important de cette étude est la recherche d'une analogie entre les niveaux d'immunité mesurés en CA et en CRBM bien que ces moyens d'essais correspondent à des principes de fonctionnement et de mesures différents.

1.3.2 Relation entre les amplitudes du champ électrique de calibrage en Chambre Anéchoïque et en Chambre Réverbérante à Brassage de Modes pour un même niveau d'immunité

L'étude expérimentale de l'immunité de systèmes électroniques est généralement réalisée en CA. Dans ce cas, l'équipement est soumis à une onde plane caractérisée par une polarisation et une incidence bien définies. L'utilisation d'un plateau tournant permet alors de déterminer le niveau d'immunité le plus pénalisant pour le système étudié. En revanche, en CRBM, l'équipement se trouve immergé dans un environnement électromagnétique d'incidence et de polarisation aléatoires. Peut-on envisager d'obtenir un niveau d'immunité équivalent en CA et en CRBM ?

La " comparaison " entre les réponses des équipements est délicate : ces deux moyens d'essais sont associés à des principes physiques et des configurations de mesure différents. Ce problème a été à maintes reprises étudié, l'objectif étant de préciser l'impact de la directivité sur les résultats de mesures sur équipements.

Citons par exemple, Jansson et Bäckström [31] qui suggèrent d'ajouter une marge de $10 - 15dB$ aux valeurs mesurées en CRBM en raison des effets non négligeables de la directivité et de la polarisation en CA.

Freyer et Bäckström [32, 33] ont prouvé que les essais en CA et en CRBM dépendent de la directivité D de l'équipement. L'approche proposée montre que, sous certaines conditions d'essai, l'erreur biaisée (rapport entre les valeurs mesurée et réelle du champ) est identique en CA et en CRBM.

Ladbury [30] a établi, expérimentalement, une relation entre les puissances reçues par une antenne sans pertes placée dans les deux moyens d'essais :

$$\frac{P_r^{CA}}{\ll P_r \gg} = 2D \quad (1.20)$$

Enfin, une relation entre le module du champ $\|\hat{\mathbf{E}}^{CA}\|$ généré en CA et la valeur maximum $\|\hat{\mathbf{E}}\|_{max}$ du module du champ électrique dans une CRBM a été introduite par Lucas Musso en considérant le champ électrique dans la chambre réverbérante comme une somme finie d'ondes planes :

$$\frac{\|\hat{\mathbf{E}}^{CA}\|}{\|\hat{\mathbf{E}}\|_{max}} = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot \mathbf{f}(P_r) \quad (1.21)$$

avec $\mathbf{f}(P_r)$, une fonction \mathbf{f} de la puissance reçue.

Par conséquent, la recherche d'une relation théorique entre les champs de calibrage des deux moyens d'essai peut conduire à une meilleure interprétation des mesures réalisées en CRBM, la CA étant, à ce jour, le moyen d'essai le mieux maîtrisé et le plus souvent utilisé.

Afin de préciser les résultats obtenus précédemment, l'approche proposée prend en compte les propriétés probabilistes du champ électromagnétique en CRBM. Pour cela, considérons de nouveau la ligne de transmission dont les paramètres ont été précédemment précisés.

1.3.2.1 Courant induit à l'extrémité d'une ligne de transmission en environnement CRBM

Le champ électromagnétique généré en CRBM étant homogène et isotrope, il est nécessaire de prendre en compte la contribution des fils de descente de la ligne [28]. Le courant induit en sortie de ligne de transmission peut s'exprimer par la formule suivante, issue du formalisme d'Agrawal et valable quels que soient les angles de polarisation et d'incidence de la perturbation externe :

$$\begin{aligned} I_s(f) = & \frac{1}{J} \int_0^L \{Z_{20r} sh(\gamma x) + Z_c ch(\gamma x)\} \hat{\mathbf{E}}_x(f; x, 0, h) dx + \\ & \frac{1}{J} \int_0^h \{Z_c ch[\gamma(h-z)] - Z_{20r} sh[\gamma(h-z)]\} \hat{\mathbf{E}}_z(f; 0, 0, z) dz + \\ & \frac{1}{J} \frac{Z_c ch(\gamma L) + Z_{20r} sh(\gamma L)}{Z_c ch(\gamma h) + Z_{20r} sh(\gamma h)} \int_0^h \{Z_c ch[\gamma(h-z)] + Z_{20r} sh[\gamma(h-z)]\} \hat{\mathbf{E}}_z(f; l, 0, z) dz \end{aligned} \quad (1.22)$$

avec :

$$J = Z_c(Z_{20r} + Z_{2Lr})ch(\gamma L) + (Z_{20r}Z_{2Lr} + Z_c^2)sh(\gamma L)$$

où Z_{20r} et Z_{2Lr} sont les impédances ramenées au niveau des brins verticaux en début et fin de ligne.

Conformément à l'hypothèse de Hill [15], en un point donné du volume utile de la CRBM, les valeurs moyennes des modules des composantes cartésiennes du champ électrique peuvent être supposées égales.

Des mesures du champ électrique ont été effectuées en deux points distants de $L = 50cm$ du volume utile de la CRBM du LASMEA. Les trois composantes cartésiennes du champ électriques ont été mesurées dans la gamme de fréquences $[600MHz - 1.2GHz]$ et pour 51 positions de brasseur. La moyenne et l'écart-type du module des composantes du champ électrique de calibrage, respectivement égaux à 3 et $2V/m$, permettent alors, de déterminer les propriétés statistiques du second ordre du module du courant induit à l'extrémité de la ligne, à savoir sa moyenne $\ll \| I_s(f) \| \gg$ et son écart-type.

1.3.2.2 Courant induit à l'extrémité d'une ligne de transmission en environnement CA

En CA, la valeur maximale $\| I_s(f) \|_{max}^{CA}$ du module du courant induit est fonction des angles $\theta^p, \varphi, \theta$ de polarisation, d'azimut et d'élévation caractérisant le champ externe. Le courant est donné par [26] :

$$\begin{aligned}
I_s^{CA}(f) &= \frac{2h\hat{\mathbf{E}}^{CA}(f)}{\cosh(\gamma L)(Z_1+Z_2)+\sinh(\gamma L)(Z_c+\frac{Z_1Z_2}{Z_c})} \\
&\frac{\sin(kh\cos\theta)}{kh\cos\theta} \{jk\cos\theta(-\sin\theta^p\cos\theta\sin\varphi + \cos\theta^p\cos\varphi) \\
&\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{Z_1}{Z_c} \right) \frac{e^{(\gamma+jk\sin\theta\sin\varphi)L}-1}{\gamma+jk\sin\theta\sin\varphi L} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Z_1}{Z_c} \right) \frac{e^{-(\gamma+jk\sin\theta\sin\varphi)L}-1}{\gamma-jk\sin\theta\sin\varphi L} \right] \\
&+ \sin\theta^p\sin\theta \left[1 - \left(\cosh(\gamma L) + \sinh(\gamma L) \frac{Z_1}{Z_c} \right) e^{(\gamma+jk\sin\theta\sin\varphi)L} \right] \}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, le nombre d'onde caractérisant la propagation dans l'air.

Afin de simuler les conditions expérimentales, l'angle φ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, l'angle θ est pris égal à 0.

Deux valeurs sont considérées pour θ_p :

$\theta_p = 0$ caractérisant la polarisation verticale et $\theta_p = \frac{\pi}{2}$ la polarisation horizontale.

1.3.2.3 Relation entre les champs de calibrage en CA et en CRBM pour un niveau d'immunité équivalent

Il s'agit ici d'établir une correspondance entre le module du champ électrique de calibrage en CA : $\|\hat{\mathbf{E}}^{CA}(f)\|_{max}$ et la valeur moyenne $\ll \|\hat{\mathbf{E}}(f)\| \gg_N$ (sur une révolution du brasseur) du module du champ électrique de calibrage en CRBM, pour un même niveau d'immunité. Cela revient à considérer, dans le cas d'une ligne de transmission, que la valeur maximale du courant induit en CA à l'extrémité du conducteur est identique à la valeur moyenne du module du courant induit en CRBM, soit :

$$\|I_s^{CA}(f)\|_{max} = \ll \|I_s(f)\| \gg_N \tag{1.24}$$

Ceci nous conduit à l'évaluation du rapport :

$$\frac{\|\hat{\mathbf{E}}^{CA}(f)\|_{eff}}{\ll \|\hat{\mathbf{E}}(f)\| \gg_N} \tag{1.25}$$

$\|\hat{\mathbf{E}}^{CA}(f)\|_{eff}$ étant la valeur efficace du module du champ en CA.

Pour un rapport $\|\hat{\mathbf{E}}^{CA}(f)\|_{eff} / \ll \|\hat{\mathbf{E}}(f)\| \gg_N = 1$, ce qui correspond à des niveaux de champ électrique de calibrage équivalents pour les deux moyens d'essai, l'évolution des courants $\ll \|I_s(f)\| \gg_N$ et $\|I_s^{CA}(f)\|_{max}$ en fonction de la fréquence est donnée par la Fig. 1.14.

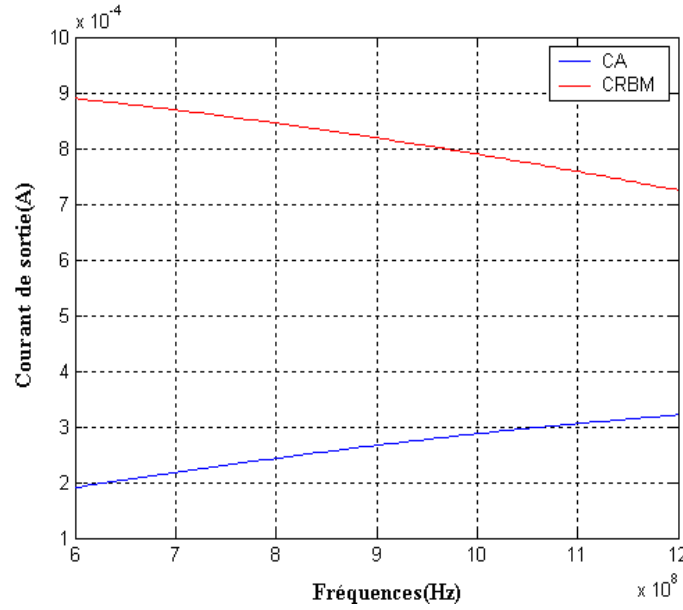


FIG. 1.14 – Evolution de $\ll \| I_s(f) \| \gg_N$ et $\| I_s^{CA}(f) \|_{max}$ en fonction de la fréquence et pour $\| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{eff} = \ll \| \hat{\mathbf{E}}(f) \| \gg_N$

Cette courbe met en évidence les différences de comportement de la ligne de transmission en CA et en CRBM, au niveau de l'amplitude et de l'évolution en fonction de la fréquence du module du courant induit. Afin d'interpréter ces résultats, assimilons la ligne de transmission à une antenne sans perte.

Le courant circulant dans la charge Z_2 peut alors être obtenu à partir du schéma équivalent de Thévenin donné sur la Fig. 1.15, V_{co} désignant la tension en circuit ouvert et Z_{in} , Z_2 les impédances d'entrée et de charge de la ligne en réception.

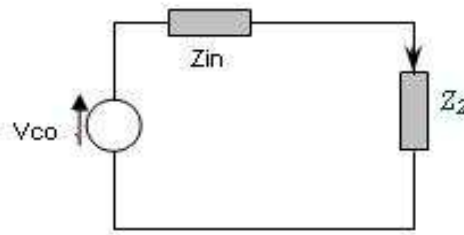


FIG. 1.15 – Schéma de Thévenin équivalent à la ligne de transmission

Il en résulte qu'en CA, le module du courant induit sur la ligne s'obtient par :

$$\| I^{CA}(f) \|_{max} = \frac{h_{eff} \| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{max}}{|Z_{in} + Z_2|} \quad (1.26)$$

où h_{eff} est la hauteur effective de l'antenne.

Par ailleurs, en CRBM, l'application du théorème de réciprocité nous fournit un rapport entre la tension en circuit ouvert et la valeur moyenne du courant [29]. On obtient ainsi la relation suivante, en supposant l'antenne sans perte :

$$\frac{|V_{co}|^2}{4R_{ray}} = \frac{\ll \| \hat{\mathbf{E}}(f) \| \gg_N^2 \lambda^2}{Z_0 8\pi} \quad (1.27)$$

où λ et Z_0 sont respectivement la longueur d'onde et l'impédance du vide ; R_{ray} est la résistance de rayonnement de l'antenne.

A partir du schéma équivalent (Fig. 1.15) et de l'équation (1.27) nous obtenons :

$$\ll \| I_s(f) \| \gg^2 = \frac{R_{ray} \lambda^2}{2\pi Z_0} \frac{\ll \| \hat{\mathbf{E}}(f) \| \gg_N^2}{|Z_{in} + Z_2|^2} \quad (1.28)$$

En identifiant les relations (1.26) et (1.28) il vient :

$$\frac{\ll \| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{max}^2}{\ll \| \hat{\mathbf{E}}(f) \| \gg_N^2} = \frac{R_{ray}}{Z_0 h_{eff}^2} \frac{\lambda^2}{2\pi} \quad (1.29)$$

Or la directivité maximale de l'antenne est donnée par :

$$D = \frac{k^2 Z_0 h_{eff}^2}{4\pi R_{in}} = \frac{\pi}{\lambda^2} \frac{Z_0 h_{eff}^2}{R_{in}} \quad (1.30)$$

Enfin, en associant les équations (1.29) et (1.30), nous en déduisons :

$$\frac{\ll \| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{max}}{\ll \| \hat{\mathbf{E}}(f) \| \gg_N} = \frac{1}{\sqrt{2D}} \quad (1.31)$$

soit encore, puisque $\ll \| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{max} = \sqrt{2} \ll \| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{eff}$:

$$\frac{\ll \| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{eff}}{\ll \| \hat{\mathbf{E}}(f) \| \gg_N} = \frac{1}{2\sqrt{D}} \quad (1.32)$$

où $\ll \| \hat{\mathbf{E}}^{CA}(f) \|_{eff}$ est la valeur efficace du module du champ électrique en CA.

Les résultats fournis par cette équation et ceux déduits des simulations de Monte-Carlo sont en très bon accord, comme on peut l'observer sur Fig. 1.16.

Cette relation simple fait intervenir la directivité et a été établie pour une antenne sans perte. Les dimensions du système utilisé sont assez faibles pour ne pas perturber les caractéristiques probabilistes de l'environnement électromagnétique en CRBM.

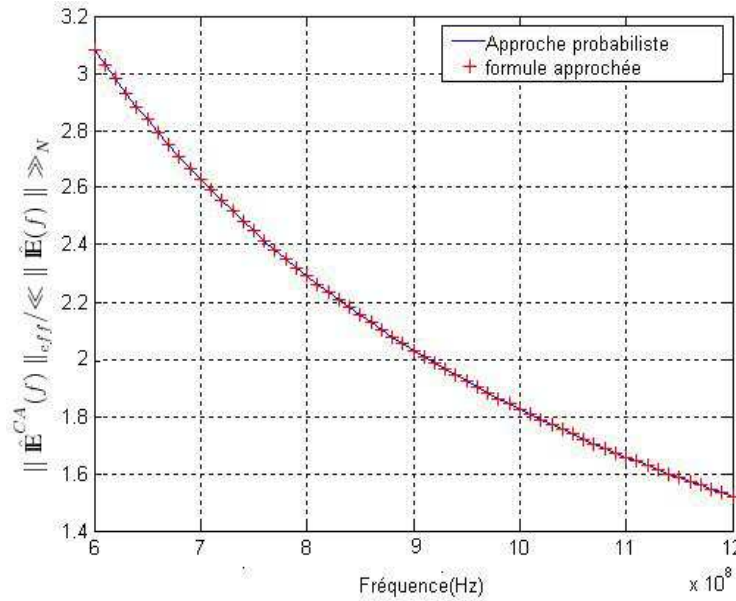


FIG. 1.16 – Evolution du rapport $\frac{\|\hat{E}^{CA}(f)\|_{eff}}{\|\hat{E}(f)\|_N}$ en fonction de la fréquence

Il est à noter que cette méthodologie, qui utilise les propriétés statistiques du second ordre du champ électrique en CRBM, reste valable quelle que soit la loi de distribution suivie par cette grandeur. Rappelons ici que l'avantage de la méthode probabiliste présentée est de s'affranchir de la simulation de la CRBM, l'étude de la réponse d'un objet en environnement CRBM pouvant conduire en effet à des temps de calculs prohibitifs.

Conclusion

Dans ce chapitre, le test d'adéquation de KS aux lois de probabilité théoriques issues des travaux de Hill a permis de déterminer une fréquence minimale d'utilisation de la CRBM. La valeur de cette fréquence limite a pu être ajustée d'une part, par l'utilisation du test d'adéquation aux lois théoriques du χ^2 de Pearson, et, d'autre part, par le test d'homogénéité du χ^2 . L'utilisation de ces différents tests ont permis de définir une fréquence limite de fonctionnement optimale de la CRBM du LASMEA, située autour de $340 MHz$. Aux fréquences supérieures à ce seuil, l'étude de l'immunité d'un système électronique ne modifiant pas l'environnement électromagnétique, en l'occurrence une ligne de transmission sans pertes, a pu être réalisée en modélisant la source via les lois de probabilité des grandeurs électromagnétiques générées en CRBM. En effet, dans le cadre de l'approche proposée, le champ électromagnétique illuminant l'objet sous test, a été pris en compte par les lois de probabilité de ses composantes. Cette méthode a permis de déterminer la densité de probabilité du courant induit à l'extrémité d'une ligne de transmission en CRBM, sans recourir à la modélisation de l'ensemble cavité/brasseur en rotation, et donc sans nécessiter des temps de calculs importants. En vue d'une meilleure interprétation des résultats issus de la CRBM à partir de ceux, mieux maîtrisés, obtenus en CA, une formule simple entre les champs électriques de calibrage en CA et en CRBM a été établie en considérant un niveau d'immunité équivalent dans les deux structures. Nous avons en particulier montré que la connaissance de la variance des parties réelle et imaginaire du champ électrique permet une évaluation rapide du module du courant en sortie d'une ligne de

transmission. Cependant, la connaissance d'un tel paramètre doit recourir à des techniques statistiques d'identification du champ électromagnétique dans la CRBM.

Cette approche exige néanmoins de disposer d'un nombre important de données. Au niveau expérimental, la quantité de mesures nécessaires conduirait à des programmes d'essais de durée prohibitive. On peut alors envisager de recourir à la modélisation numérique de la CRBM, ce qui n'est pas sans difficultés. En effet, les simulations sont liées notamment à la méconnaissance des paramètres électriques de la structure, comme par exemple la conductivité des parois, ainsi que la nécessité de prendre en compte la rotation du brasseur pour l'obtention de résultats réalistes.

Pour ces différentes raisons, les travaux présentés dans le second chapitre font référence aux résultats de Hill pour la caractérisation de l'environnement électromagnétique en CRBM. Ce moyen d'essai permet-il de reproduire de manière réaliste l'environnement réel ? Plaçons-nous dans le cas particulier des équipements automobiles. Le problème alors posé est de déterminer, à partir d'une méthode d'estimation de champ aléatoire, les paramètres probabilistes du champ électromagnétique généré à l'intérieur de structures semi-fermées, telles qu'un véhicule automobile. En effet, la question soulevée est de mesurer la pertinence des mesures CEM sur équipements en CRBM vis-à-vis des caractéristiques réelles du champ électromagnétique à l'intérieur de l'habitacle.

Chapitre 2

Caractérisation probabiliste de l'environnement électromagnétique dans des structures semi-fermées

Sommaire

2.1	Comparaison des paramètres probabilistes des environnements CRBM et véhicule automobile	49
2.1.1	Estimation des densités de probabilité du champ électromagnétique en CRBM	50
2.1.2	Caractéristiques du champ électromagnétique dans le véhicule et comparaison avec la CRBM	54
2.2	Estimation statistique du champ électromagnétique aléatoire généré dans un véhicule automobile	62
2.2.1	Acquisition des données : simulation du véhicule avec un code temporel	62
2.2.2	Hypothèses sur le champ électromagnétique du véhicule automobile	64
2.2.3	Estimation des paramètres du second ordre du champ aléatoire	66

La modélisation stochastique peut se définir comme une description simplifiée d'une conjoncture dans un formalisme mathématique permettant de tenir compte de la réalité de l'incertain. Les modèles stochastiques permettent d'analyser efficacement et avec réalisme des configurations complexes. Les méthodes probabilistes qui leur sont associées commencent aujourd'hui à intégrer la boîte à outils des scientifiques, et ce dans des domaines très variés comme par exemple la gestion de production, l'optimisation, la fiabilité, les finances et assurances, le traitement d'images et de la parole, la biologie, la mécanique, ...

En électronique et en télécommunications, l'étude des processus aléatoires présente notamment un intérêt dans le secteur des communications numériques où certains signaux sont impossibles à caractériser a priori. L'exploitation des processus aléatoires est aussi à la base de nombreuses approches en traitement du signal, tant pour caractériser le contenu fréquentiel du signal (analyse spectrale), que pour filtrer, coder et tatouer un signal de parole. Plus généralement, les sources d'information telles que le son, les images sont aléatoires et varient dans le temps. Enfin, les processus aléatoires ont une application directe dans le cadre du traitement du trafic dans les réseaux et notamment pour l'analyse du temps de transfert et /ou du temps de traitement d'un paquet d'informations de taille aléatoire, généré à des intervalles de temps aléatoires.

L'utilisation de ces processus s'impose pour étudier un système où, à chaque instant, plusieurs évolutions sont possibles, chacune d'elles ayant une certaine probabilité d'être réalisée. Lorsqu'il n'est pas nécessaire de connaître l'historique du système pour prédire son évolution future, mais que la connaissance du présent suffit, l'évolution du système pourra être modélisée par un processus aléatoire particulier : le processus de Markov. Généralement, ces modèles incluent des paramètres dont les valeurs exactes sont inconnues. La statistique est donc encore appelée à jouer un rôle de pont entre le modèle théorique déterministe et son utilisation pratique. En effet, on cherchera, à partir d'observations du phénomène étudié, à obtenir des estimations de ces paramètres, à tester des hypothèses relatives à leur comportement ou, plus globalement, à vérifier l'ajustement du modèle lui-même à la réalité.

Ces méthodes probabilistes sont ainsi devenues des outils classiques d'analyse et de modélisation de signaux expérimentaux issus d'expériences de natures diverses. Cependant, un nombre important de questions fondamentales demeurent quant à la simulation, l'identification de modèles ou encore l'estimation de paramètres. Des progrès sur ces questions ne seront obtenus qu'à travers des interactions fortes entre différentes spécialités (mathématiques, traitement du signal, statistiques et applications, ...).

Ce chapitre présente une introduction aux méthodes probabilistes appliquées aux problématiques CEM, pour l'analyse de l'environnement électromagnétique dans des structures semi-fermées.

Les temps de calcul et de mesure du champ électromagnétique pouvant devenir prohibitifs, la mise au point de modèles de prédiction du comportement du champ électromagnétique dans une cavité est devenue une thématique d'actualité. Une difficulté fondamentale réside dans le fait que les propriétés physiques du champ électromagnétique ne sont pas parfaitement connues en tout point de l'espace. Un cheminement consiste à modéliser l'environnement électromagnétique par un champ aléatoire et ensuite, à identifier ce dernier. Les modèles probabilistes de champs aléatoires généralement utilisés sont, tout en vérifiant des propriétés mathématiques fondamentales, pilotés par un petit nombre de paramètres comprenant notamment les grandeurs du second ordre (moyenne, variance, fonction de corrélation, densité spectrale) ou des paramètres liés à ces grandeurs (longueur de corrélation, facteur d'échelle, ...). L'étape première de l'identification de champs aléatoires est donc l'estimation de ces différents paramètres. Ce volet, nécessaire à la modélisation probabiliste et à l'identification de champs aléatoires, requiert ce-

pendant un nombre important d'échantillons pouvant difficilement être obtenus expérimentalement ou numériquement. En CRBM, notamment, les expérimentations s'avèrent longues et coûteuses tandis que les codes numériques demandent d'importantes ressources informatiques.

C'est pourquoi, l'étude présentée dans ce chapitre est fondée sur les hypothèses de Hill concernant les caractéristiques de l'environnement électromagnétique en CRBM : des données issues de la simulation d'un véhicule automobile soumis à un champ électromagnétique externe ont été fournies par la société PSA Peugeot Citroën. Les normes actuelles proposent la CRBM comme moyen d'essai en immunité rayonnée pour les équipements confinés dans des enceintes métalliques fermées ou semi-fermées (véhicule automobile, avion,...). Il importe alors d'appréhender en quel sens l'environnement en CRBM peut être «comparé» à celui généré à l'intérieur de ces systèmes soumis à un champ électromagnétique perturbateur. Des prémices de réponses à cette question peuvent être obtenues par la comparaison des paramètres statistiques (densité de probabilité marginale d'ordre 1, fonction de répartition, corrélation,...) du champ électromagnétique dans ces types d'environnements. Telle est la démarche que nous avons adoptée dans ce chapitre. Mais, ne disposant pas d'un nombre suffisant d'échantillons en CRBM pour l'estimation de l'ensemble des paramètres statistiques, la comparaison se fera ici uniquement par le biais des estimées des densités de probabilité marginales d'ordre 1 du champ électromagnétique, désignées, par la suite et dans un souci de simplification, par densités de probabilité.

Enfin, dans le but de déterminer les paramètres statistiques de l'environnement habitacle, des estimateurs statistiques performants ont été appliqués à des données générées par un code FDTD (Finite Difference in Time Domain) pour la modélisation d'un véhicule soumis à un champ électromagnétique aléatoire.

2.1 Comparaison des paramètres probabilistes des environnements CRBM et véhicule automobile

Les équipements électroniques devant assurer des fonctions dans les véhicules automobiles rendent incontournables l'évaluation des risques CEM. Les essais automobiles sont habituellement réalisés en CA. Or, on constate un intérêt naissant et croissant du domaine industriel automobile pour les CRBM, issu de la nécessité de rendre plus efficace le processus de contrôle des véhicules, allant jusqu'à l'homologation CEM.

Ce processus (préconisation-validation-homologation) accompagne la conception et le développement du véhicule depuis la phase de conception de chaque partie (équipements électriques et électroniques, câblage, carrosserie) jusqu'à la phase d'homologation finale du véhicule. Le processus étant complexe, il est impératif de rendre fiable chaque étape et de corréler les résultats entre les étapes successives afin d'optimiser le processus global, en l'occurrence pour les mesures d'immunité rayonnée sur équipements («sur table») et sur véhicule. L'un des soucis est lié respectivement à la fiabilité, à la reproductibilité, et à la corrélation des résultats de mesure, qui sont notamment obtenus en CA. Les résultats de mesure sont affectés d'une incertitude liée à plusieurs causes difficilement maîtrisables : configuration de mesure, caractéristiques différentes d'une CA à l'autre, Cela nuit à la reproductibilité des mesures et se traduit concrètement par l'application de marges de sécurité sur les contraintes imposées aux équipements. Lors des tests en CA, l'équipement est exposé à une illumination par une onde plane : se pose alors la question de la représentativité du test vis-à-vis de l'environnement réel. En revanche, lorsque l'équipement est embarqué, l'interaction avec les parties métalliques du véhicule provoque de multiples réflexions. On peut alors penser assimiler l'habitacle du véhicule à une cavité, voire à une CRBM. Ainsi, les normes actuelles proposent cette structure comme un moyen d'essai alternatif pour les équipements automobiles afin de rendre les mesures plus fiables et ainsi, optimiser le processus CEM global.

Néanmoins, la structure externe assez complexe du véhicule soulève beaucoup de questions concernant

les caractéristiques du champ dans cet environnement comparé à un environnement réverbérant. En effet, environ 1/3 des bords extérieurs entourant le compartiment interne est constitué de vitres alors que le reste est métallique (Fig. 2.1).

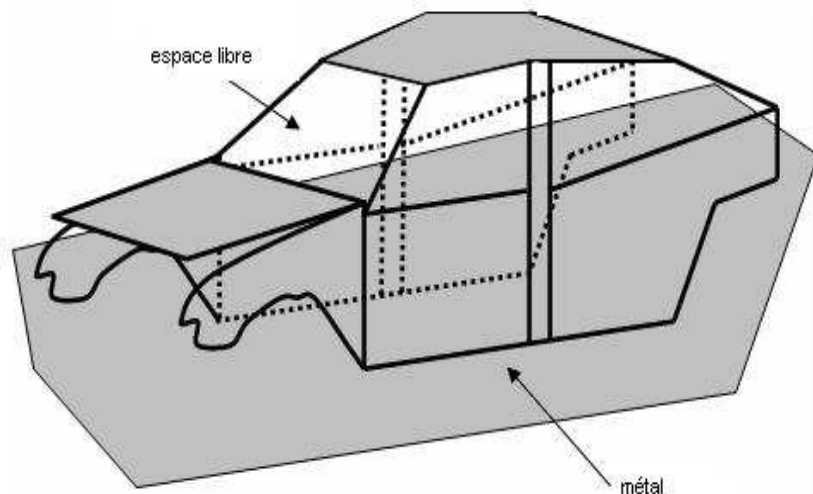


FIG. 2.1 – Représentation d'un véhicule automobile

Ainsi, la transposition des tests sur véhicule vers des essais sur table demeure toujours une question sans réponse. Les études expérimentales antérieurement menées à ce sujet [38] ont porté sur le couplage sur table et sur véhicule du réseau Laguna II, le réseau sur véhicule étant fixé à proximité de la caisse du véhicule. Les conclusions ont notamment porté sur des différences entre les deux types d'essais, différences notamment liées à un «effet d'écran» de la caisse du véhicule sur le réseau.

Dans notre approche, la comparaison proposée porte sur les densités de probabilité du champ électrique en CRBM et dans le véhicule. Afin de prendre en compte les imperfections des deux structures, notamment liées à la présence d'ouvertures, les données sont d'une part issues de résultats expérimentaux de la CRBM du LASMEA et, d'autre part, fournies par PSA Peugeot Citroën.

2.1.1 Estimation des densités de probabilité du champ électromagnétique en CRBM

Le module du champ électromagnétique est mesuré en 80 points du volume utile et pour 51 positions de brasseur dans la gamme de fréquences $[250MHz - 1GHz]$, ce qui représente 51 trajectoires et 80 points d'échantillonnage de chaque trajectoire. Conformément aux tests statistiques et aux travaux de Hill correspondant à une CRBM idéale et, dans le but de contourner le problème du manque de données, l'hypothèse d'homogénéité et d'ergodicité du champ électromagnétique sera admise à partir de $390MHz$ conformément aux résultats du chapitre 1. Cette hypothèse nous permettra de confronter statistiques d'ensemble et statistiques trajectorielles et de supposer la densité de probabilité du champ indépendante de la variable d'espace.

Sur la base de cette hypothèse, nous pouvons alors admettre que nous disposons, pour chacun des modules $\|\hat{\mathbf{E}}_x(f; \mathbf{r})\|$, $\|\hat{\mathbf{E}}_y(f; \mathbf{r})\|$, $\|\hat{\mathbf{E}}_z(f; \mathbf{r})\|$ des composantes $\hat{\mathbf{E}}_x(f; \mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{E}}_y(f; \mathbf{r})$, $\hat{\mathbf{E}}_z(f; \mathbf{r})$ du champ électromagnétique de (51×80) réalisations des observations de ces modules. D'autre part, en complément au chapitre 1, les expressions des différentes lois théoriques et celles de leurs paramètres seront

données. Afin de simplifier les notations, $\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r})$ sera ici noté $\hat{\mathbf{E}}_p$, $p \in \{x, y, z\}$.

2.1.1.1 Densité de probabilité du module d'une composante du champ électrique

Chaque composante $\hat{\mathbf{E}}_p$, $p \in \{x, y, z\}$, du champ électrique peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{E}}_p = \hat{\mathbf{E}}_p^R + j\hat{\mathbf{E}}_p^I \quad (2.1)$$

où $\hat{\mathbf{E}}_p^R$ et $\hat{\mathbf{E}}_p^I$ sont respectivement les parties réelle et imaginaire de $\hat{\mathbf{E}}_p$.

D'après Hill [15], $\forall p \in \{x, y, z\}$, les observations de $\hat{\mathbf{E}}_p^R$ et $\hat{\mathbf{E}}_p^I$ en tout point sont des variables indépendantes gaussiennes, centrées et de même écart-type s , i.e. $\hat{\mathbf{E}}_p^R, \hat{\mathbf{E}}_p^I \sim \mathcal{N}(0, s^2)$. Par conséquent, $\forall p \in \{x, y, z\}$, $\|\hat{\mathbf{E}}_p\| = \sqrt{(\hat{\mathbf{E}}_p^R)^2 + (\hat{\mathbf{E}}_p^I)^2}$ peut s'écrire :

$$\|\hat{\mathbf{E}}_p\| = s \|\overset{\circ}{G}\| = s \sqrt{\overset{\circ}{G}_1^2 + \overset{\circ}{G}_2^2} \quad (2.2)$$

avec $\overset{\circ}{G} = (\overset{\circ}{G}_1, \overset{\circ}{G}_2)$ est une variable aléatoire gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^2 , i.e. $\overset{\circ}{G} \sim \mathcal{N}(0_2, I_{2 \times 2})$.

Il en résulte que $\|\hat{\mathbf{E}}_x\|$, $\|\hat{\mathbf{E}}_y\|$, $\|\hat{\mathbf{E}}_z\|$ suivent une loi de Rayleigh d'ordre 2 à facteur d'échelle s et ont pour densité de probabilité (cf. annexe B) :

$$\mathbb{P}_{\|\hat{\mathbf{E}}_p\|}(x) = \frac{x e^{-\frac{x^2}{2s^2}}}{s^2} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \quad (2.3)$$

Leurs moyenne $\ll \|\hat{\mathbf{E}}_p\| \gg$ et écart-type $s_{\|\hat{\mathbf{E}}_p\|}$ s'écrivent en outre :

$$\begin{aligned} \ll \|\hat{\mathbf{E}}_p\| \gg &= s \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ s_{\|\hat{\mathbf{E}}_p\|} &= s \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

avec $p \in \{x, y, z\}$.

En pratique, s est choisi tel que :

$$s^2 = \frac{s_{m\|\hat{\mathbf{E}}_p\|}^2 + s_{e\|\hat{\mathbf{E}}_p\|}^2}{2} \quad (2.5)$$

où :

$$\begin{aligned} s_{m\|\hat{\mathbf{E}}_p\|} &= \ll \|\tilde{\hat{\mathbf{E}}}_p\| \gg \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}} \\ s_{e\|\hat{\mathbf{E}}_p\|} &= \tilde{s}_{\|\hat{\mathbf{E}}_p\|} \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}} \end{aligned} \quad (2.6)$$

avec $\ll \|\hat{\mathbf{E}}_p\| \gg$ et $\tilde{s}_{\|\hat{\mathbf{E}}_p\|}$, les estimées statistiques de la moyenne et de l'écart-type du module de $\hat{\mathbf{E}}_p$.

Notons que, toujours d'après Hill [15], non seulement, en tout point, $\hat{\mathbf{E}}_p^R$ et $\hat{\mathbf{E}}_p^I$ sont isonomes et indépendantes pour tout p , mais il en est de même des trois couples $(\hat{\mathbf{E}}_p^R, \hat{\mathbf{E}}_p^I)$, $p \in \{x, y, z\}$, avec de plus une indépendance d'ensemble. Par conséquent, en tout point, les six variables aléatoires $(\hat{\mathbf{E}}_x^R, \hat{\mathbf{E}}_y^R, \hat{\mathbf{E}}_z^R, \hat{\mathbf{E}}_x^I, \hat{\mathbf{E}}_y^I, \hat{\mathbf{E}}_z^I)$ sont isonomes de loi $\mathcal{N}(0, s^2)$ et indépendantes dans leur ensemble.

A titre d'exemple, la Fig. 2.2 présente une comparaison, à la fréquence de $970MHz$, des fonctions de répartition théorique et estimée à partir des mesures expérimentales en CRBM de $\|\hat{\mathbf{E}}_y\|$. On peut observer une adéquation satisfaisante entre les deux distributions.

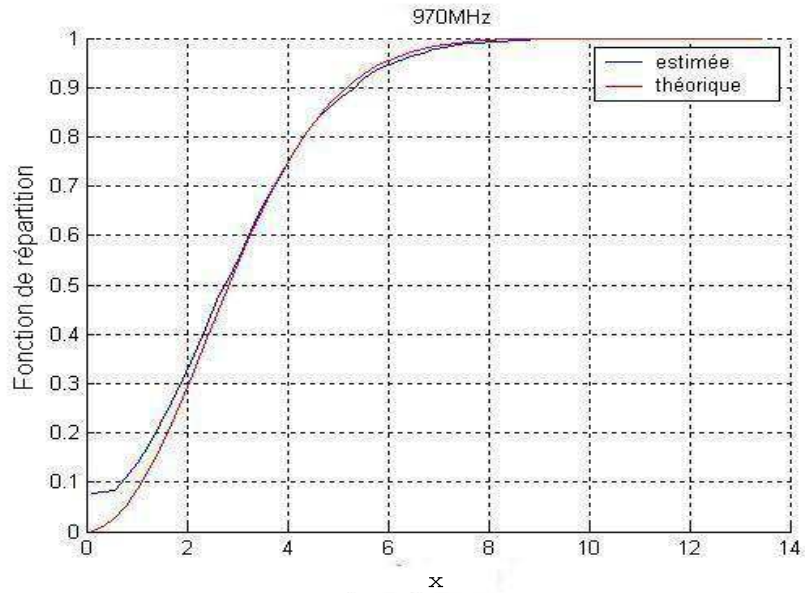


FIG. 2.2 – Comparaison entre les fonctions de répartition théorique et estimée de $\|\hat{\mathbf{E}}_y\|$

2.1.1.2 Densité de probabilité du module du champ électrique total

Le module du champ total s'écrit en chaque point :

$$\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\| = \sqrt{\sum_{p=x,y,z} (\mathbf{E}_p^R)^2 + \sum_{p=x,y,z} (\mathbf{E}_p^I)^2} \quad (2.7)$$

Or, nous venons de voir qu'en chaque point, ces six variables aléatoires sont indépendantes dans leur ensemble et distribuées selon la même loi gaussienne centrée d'écart-type s . Par conséquent, ce module peut encore s'écrire :

$$\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\| = s \|\hat{G}\| \quad (2.8)$$

avec $\overset{\circ}{G} = (\overset{\circ}{G}_1, \dots, \overset{\circ}{G}_6)$ est une variable aléatoire gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^6 , i.e. $\overset{\circ}{G} \sim \mathcal{N}(0_6, I_{6 \times 6})$.

Il en résulte que $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ suit une loi de Rayleigh d'ordre 6 à facteur d'échelle s et a donc pour densité de probabilité, moyenne et écart-type (cf. annexe B) :

$$\begin{aligned} P_{\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|}(x) &= \frac{x^5 e^{-\frac{x^2}{2s^2}}}{8s^6} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \\ \ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\| \gg &= s \frac{15\sqrt{2\pi}}{16} \\ s_{\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|} &= s \sqrt{6 - \frac{225\pi}{128}} \end{aligned} \tag{2.9}$$

En pratique, s est choisi tel que :

$$s^2 = \frac{s_{m\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|}^2 + s_{e\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|}^2}{2} \tag{2.10}$$

où :

$$\begin{aligned} s_{m\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|} &= \ll \|\tilde{\mathbf{E}}_{tot}\| \gg \frac{1}{\frac{15\sqrt{2\pi}}{16}} \\ s_{e\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|} &= \tilde{s}_{\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|} \frac{1}{\sqrt{6 - \frac{225\pi}{128}}} \end{aligned} \tag{2.11}$$

avec $\ll \|\tilde{\mathbf{E}}_{tot}\| \gg$ et $\tilde{s}_{\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|}$, les estimées statistiques de la moyenne et de l'écart-type du module de $\hat{\mathbf{E}}_{tot}$.

A titre d'illustration, la Fig. 2.3 montre une comparaison, à la fréquence de $950MHz$, de la fonction de répartition théorique de $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ et celle estimée à partir des mesures expérimentales effectuées en CRBM. Comme précédemment, on peut observer un accord tout à fait acceptable entre ces deux distributions.

L'objectif est maintenant d'estimer la densité de probabilité du module du champ induit à l'intérieur du véhicule automobile soumis à une onde électromagnétique externe. Il s'agit donc de déterminer les caractéristiques de l'environnement électromagnétique correspondant, d'une part au centre de l'habitacle, et d'autre part à l'emplacement des équipements électroniques.

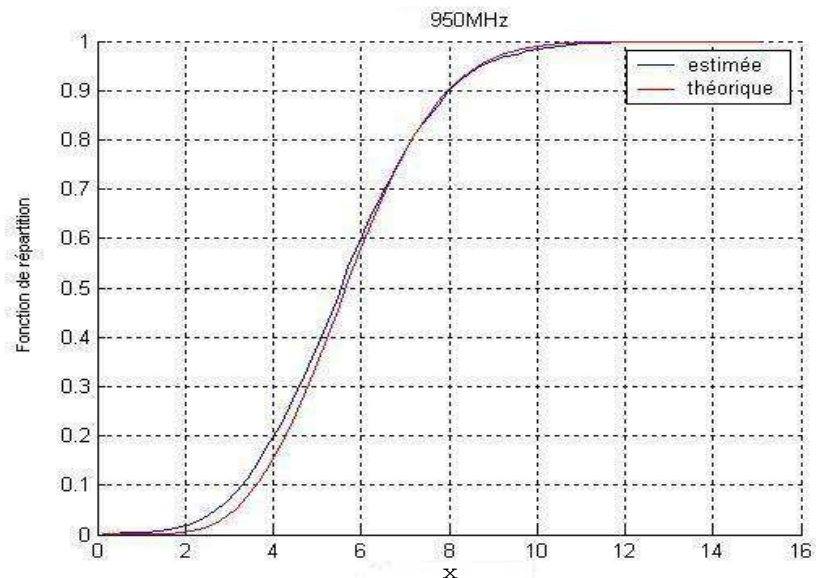


FIG. 2.3 – Comparaison entre les fonctions de répartition théorique et estimée de $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$

2.1.2 Caractéristiques du champ électromagnétique dans le véhicule et comparaison avec la CRBM

Avant de soumettre le véhicule complet aux tests, les différents équipements doivent être qualifiés vis-à-vis des exigences CEM. Cependant, se pose le problème de la représentativité du test équipement lorsque celui-ci est soumis à une onde plane. Dans quelle mesure peut-on assimiler l'habitacle incluant un certain nombre d'équipements électroniques à une cavité résonante ?

Dans le cadre de cette étude, les données de simulation numérique du champ électromagnétique généré dans un véhicule automobile ont été fournies par la société PSA Peugeot Citroën. Le système est soumis à une onde extérieure issue d'une antenne située sur le toit du véhicule. La comparaison de son environnement interne à celui d'une CRBM fera l'objet de cette étude qui sera divisée en deux parties. La première portera sur une comparaison statistique du champ électromagnétique dans l'habitacle du véhicule et dans le volume utile de la CRBM.

Par ailleurs, les appareils électroniques, et plus particulièrement les faisceaux des câbles, ne sont pas localisés dans l'habitacle, mais plutôt près de la caisse du véhicule. La deuxième partie se focalisera donc sur l'environnement des équipements électroniques comparé à celui du volume utile de la CRBM.

Les fréquences d'étude sont les suivantes : $27MHz$, $85MHz$, $146MHz$, $172MHz$, $390MHz$, $433MHz$ et $900MHz$.

2.1.2.1 Champ électromagnétique dans le compartiment véhicule

Les données du champ électromagnétique sont obtenues, pour une configuration de l'antenne d'émission, en 8111 points représentés sur la Fig. 2.4. Ces points sont situés à l'intérieur de l'habitacle du véhicule et loin des parois, la distance entre deux points étant de $5cm$.

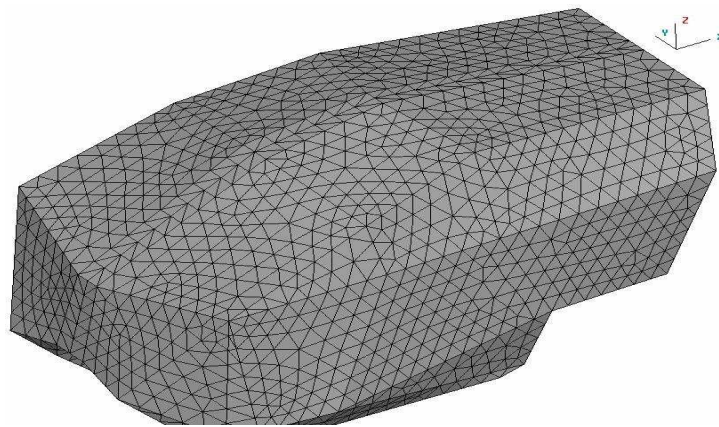


FIG. 2.4 – 8111 points de calcul dans l'habitacle du véhicule

A partir de 433MHz , les parties réelles et imaginaires du champ électrique suivent une distribution gaussienne de moyenne nulle comme l'illustre la Fig. 2.5 à la fréquence particulière de 900MHz .

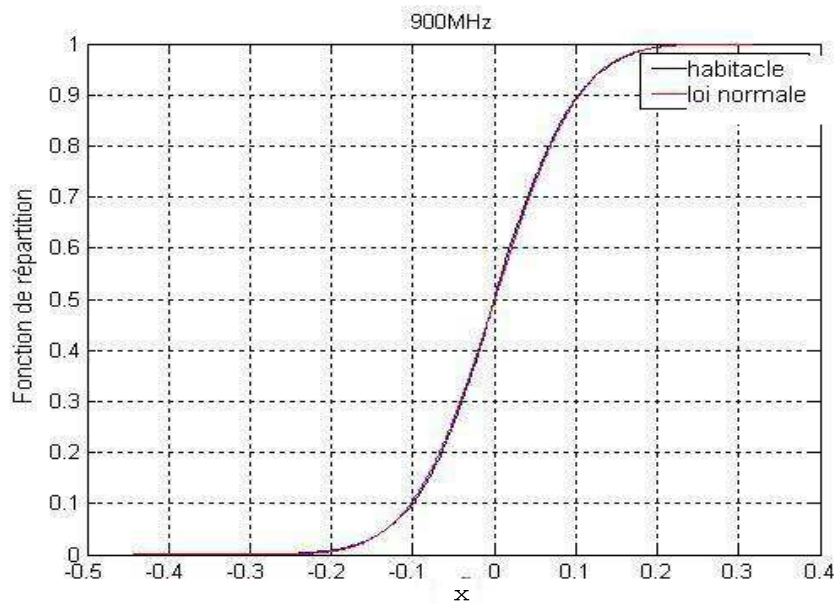


FIG. 2.5 – Fonction de répartition de la partie réelle de $\hat{\mathbf{E}}_x$ à 900MHz

On peut vérifier que les modules des composantes du champ suivent bien une loi de Rayleigh d'ordre 2 à facteur d'échelle, comme en témoigne la Fig. 2.6, toujours à la fréquence de 900MHz .

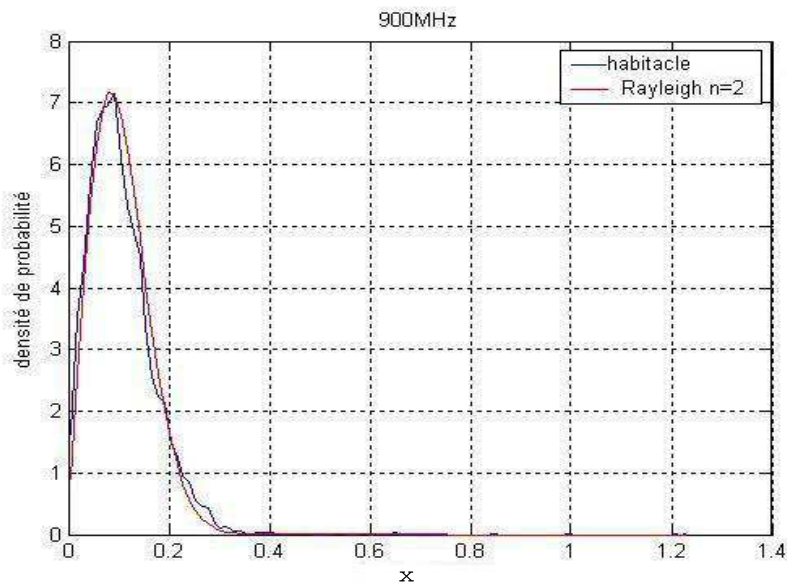


FIG. 2.6 – Densité de probabilité de $\|\hat{\mathbf{E}}_y\|$ à 900MHz

On peut également constater que la loi de Rayleigh d'ordre 6 est en bonne adéquation avec la distribution expérimentale du module du champ total dans la voiture comme le montre la Fig. 2.7.

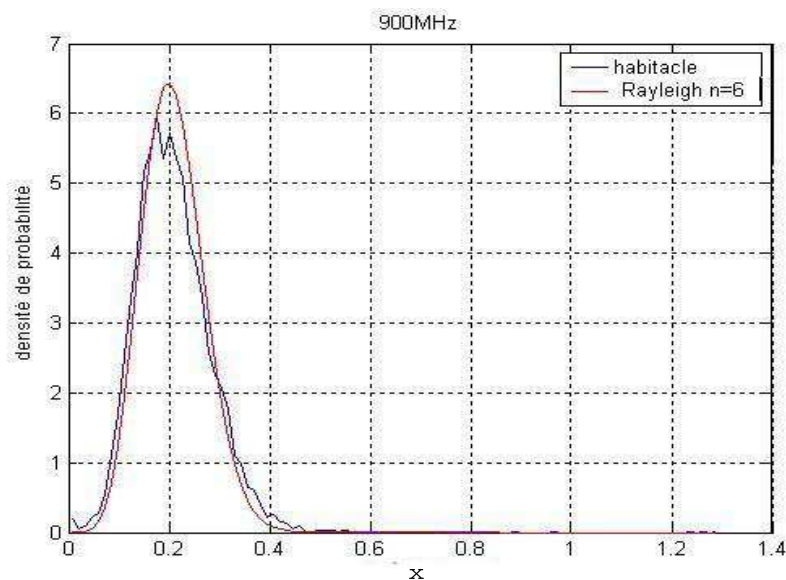


FIG. 2.7 – Densité de probabilité de $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ à 900MHz

De plus, les densités de probabilité en CRBM et dans le véhicule sont en bon accord, comme le montre la Fig. 2.8 qui compare les densités de probabilité des modules du champ total normalisés par rapport à la moyenne, dans les deux structures.

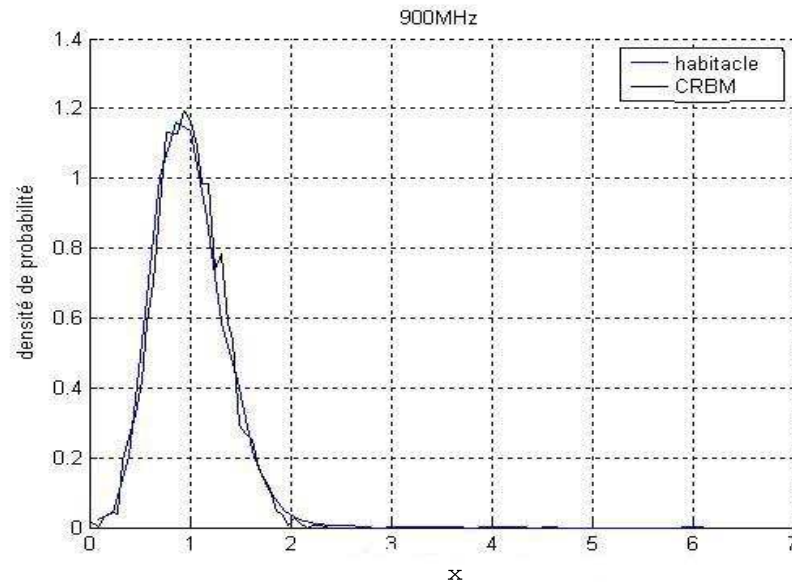


FIG. 2.8 – Densité de probabilité de $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ dans l'habitable et en CRBM à 900MHz

Après estimation de la densité de probabilité des modules des composantes du champ aux différentes fréquences pour lesquelles on dispose de données numériques, la concordance entre les estimées expérimentales et les lois théoriques en CRBM s'est avérée satisfaisante à partir de 433MHz (Fig. 2.9).

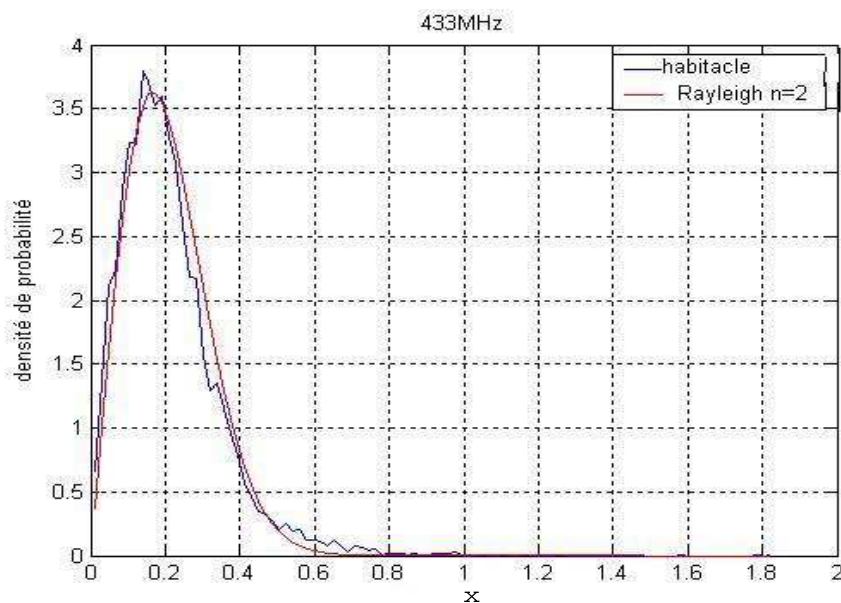


FIG. 2.9 – Densité de probabilité de $\|\hat{\mathbf{E}}_z\|$ dans l'habitable à 433MHz

En dessous de cette limite, soit à la fréquence de 390MHz , les densités de probabilité théoriques de la CRBM ne sont plus en adéquation avec les densités estimées à partir des résultats de simulation numérique du véhicule. La Fig. 2.10 illustre ce phénomène à la fréquence de 146MHz .

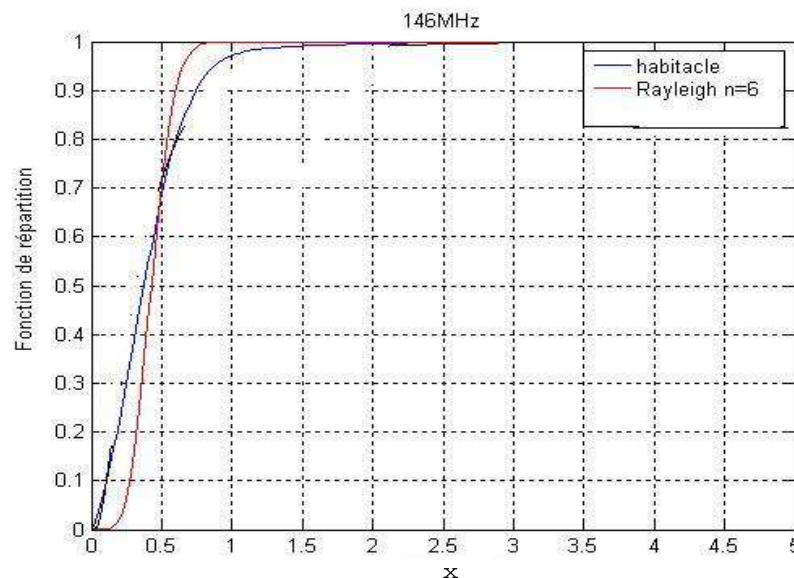


FIG. 2.10 – Fonction de répartition de $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ dans l'habitacle à 146MHz

L'environnement électromagnétique au centre du véhicule est donc comparable à celui d'une CRBM à partir d'une certaine fréquence dépendant des dimensions de l'habitacle de la voiture. Il serait par conséquent judicieux de comparer les caractéristiques des deux types d'environnement sur une large gamme de fréquences, afin de déterminer la fréquence minimale à partir de laquelle les deux environnements sont "comparables". Ce point est important pour les essais d'immunité des dispositifs situés dans le centre du véhicule (équipements, stimulateurs cardiaques de passager...) et également pour les conditions de protection sanitaire notamment pour la mesure de la puissance absorbée par des tissus biologiques (Débit d'Absorption Spécifique : DAS).

Par ailleurs, les équipements électroniques, et plus particulièrement les faisceaux électriques, ne sont pas localisés dans le volume central de l'habitacle véhicule, mais le long de la caisse du véhicule. Le prochain paragraphe se focalisera donc sur l'environnement des équipements électroniques comparé à celui du volume utile de la CRBM. Cette étude comprend deux parties :

- la première porte sur une comparaison entre le module du champ total dans l'habitacle et celui prélevé au niveau des faisceaux électriques,
- le deuxième volet concerne le champ tangentiel aux faisceaux. Ce paramètre est très important puisqu'il représente la source de tension intervenant dans les équations des lignes couplées dans le formalisme d'Agrawal. Cette source de tension distribuée caractérise le couplage entre le champ électromagnétique et les faisceaux.

2.1.2.2 Champ électromagnétique induit au niveau des faisceaux

L'objectif est maintenant de caractériser l'environnement électromagnétique induit au niveau des faisceaux électriques, situés à proximité de la caisse du véhicule. Les estimées des densités de probabilité sont obtenues à partir de 3072 points de calcul représentés sur la Fig. 2.11.

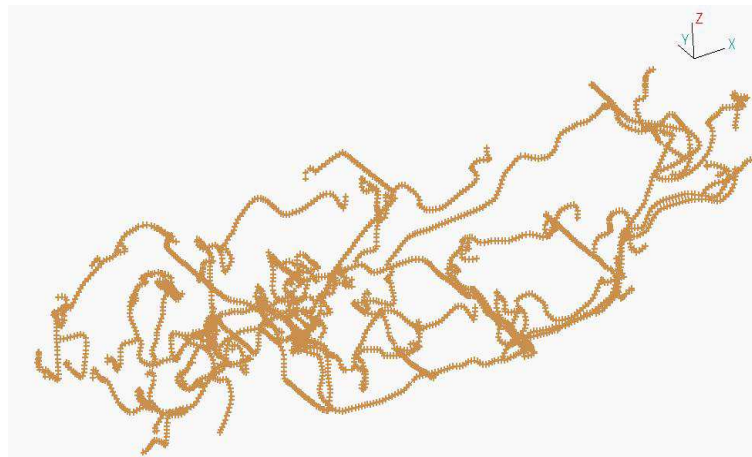


FIG. 2.11 – 3072 points de calcul sur les faisceaux de la voiture

Pour les différentes fréquences étudiées, les parties réelles et imaginaires du champ électromagnétique ne suivent pas une loi gaussienne comme l'illustre les résultats à 900MHz (Fig. 2.12). Par conséquent, les modules des composantes du champ ne suivent pas une loi de Rayleigh d'ordre 2 (Fig. 2.13) et la densité de probabilité du module du champ total sur les faisceaux est différente de celle de l'habitacle (Fig. 2.14).

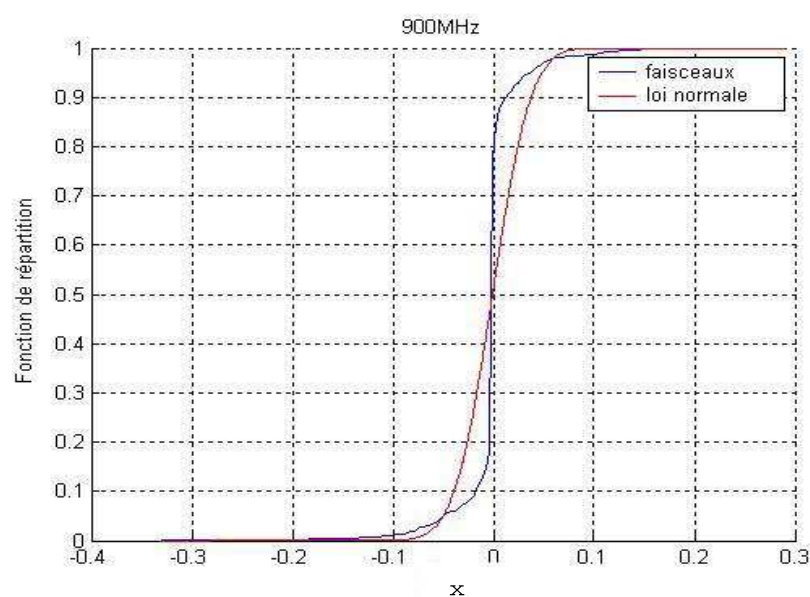


FIG. 2.12 – Fonction de répartition de la partie imaginaire de \hat{E}_x à 900MHz

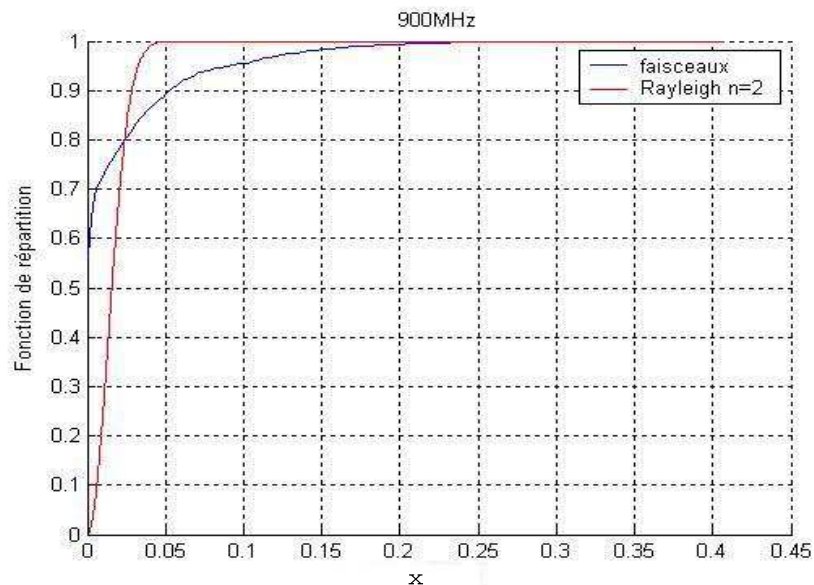


FIG. 2.13 – Fonction de répartition de $\|\hat{\mathbf{E}}_x\|$ à 900MHz

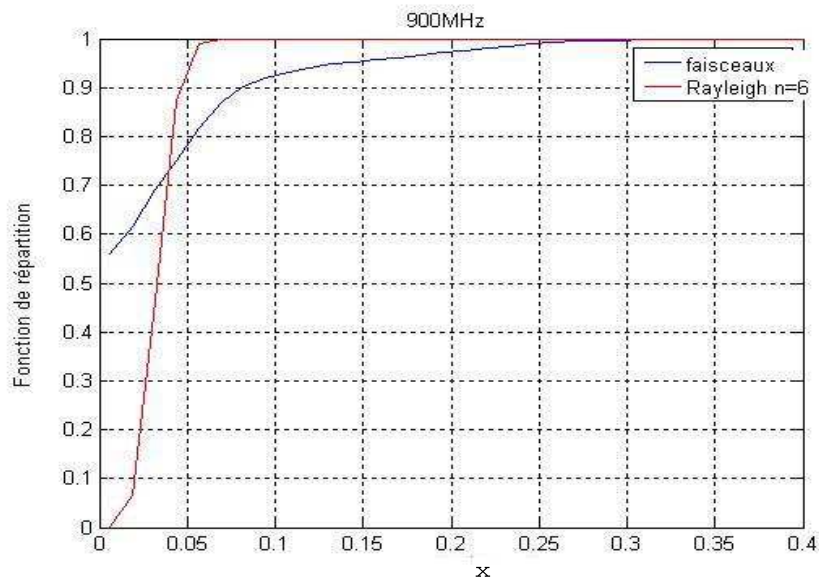


FIG. 2.14 – Fonction de répartition de $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ à 900MHz

En outre, le module du champ électrique tangentiel n'a pas les mêmes propriétés statistiques que celui du champ dans le compartiment intérieur du véhicule (Fig. 2.15).

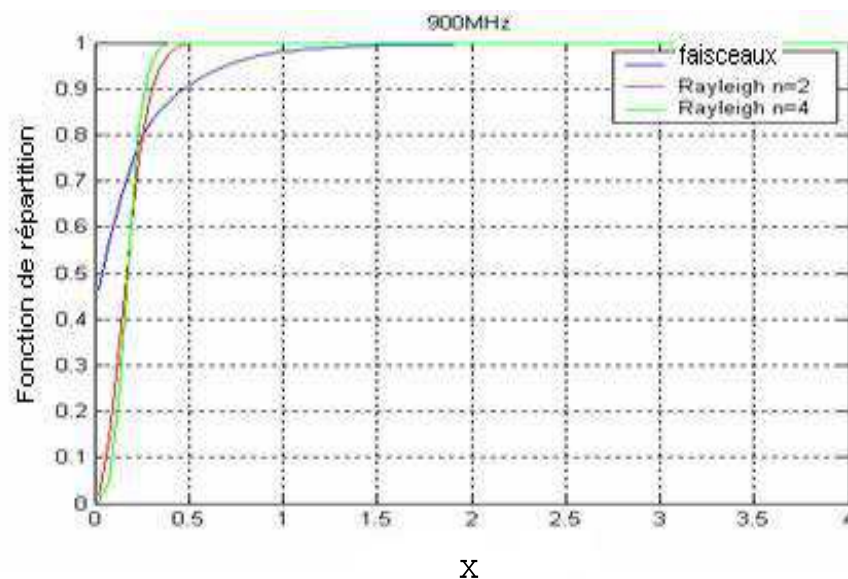


FIG. 2.15 – Fonction de répartition de $\|\hat{\mathbf{E}}_{tang}\|$ à 900 MHz

L'environnement électromagnétique des appareils électroniques situés dans un véhicule est donc statistiquement différent de l'environnement électromagnétique d'une CRBM. Ces premiers résultats montrent le besoin de réadapter les protocoles de mesure des équipements en CRBM et en particulier de préciser l'utilisation d'un plan de masse. Une étude envisageable concernerait la comparaison de ce champ induit sur les faisceaux avec le champ électromagnétique généré à proximité des parois de la CRBM [65].

Néanmoins, l'environnement électromagnétique de l'habitacle du véhicule semble être comparable à celui de la CRBM à partir d'une certaine fréquence à déterminer. Cette conclusion suppose que les hypothèses, d'une part, de gaussianité des parties réelles et imaginaires du champ électromagnétique et, d'autre part, de leur indépendance, soient satisfaites à partir de 433 MHz. Cependant, pour une comparaison probabiliste complète, il serait judicieux d'estimer d'autres paramètres statistiques du champ électromagnétique tels que la covariance du champ dans les deux environnements, estimation nécessitant un nombre important d'échantillons. Par ailleurs, et comme nous l'avons souligné précédemment, il serait opportun de disposer de résultats dans une large gamme de fréquences, afin de préciser les limites de nos conclusions. Pour ces différentes raisons, nous nous sommes orientés vers l'utilisation d'un code "Finite Difference in Time Domain" (FDTD), développé au LASMEA pour la simulation d'un véhicule automobile.

A partir des données ainsi obtenues, nous proposons une procédure d'estimation statistique, étape importante menant vers l'identification d'un champ aléatoire. Néanmoins, pour l'application de ces techniques, il est nécessaire de disposer d'un nombre important d'échantillons. Le véhicule sera donc soumis à plusieurs ondes planes de caractéristiques aléatoires afin d'obtenir un nombre important de trajectoires et de points de mesure.

2.2 Estimation statistique du champ électromagnétique aléatoire généré dans un véhicule automobile

2.2.1 Acquisition des données : simulation du véhicule avec un code temporel

La configuration d'illumination par un champ électromagnétique extérieur correspond, dans cette étude, à 60 ondes planes de configurations différentes (Fig. 2.18) illuminant un véhicule de dimensions $4.5m \times 1.7m \times 1.3m$. Le champ électromagnétique dans le véhicule est simulé par un code FDTD pour la résolution des équations de Maxwell, développé au LASMEA [36, 37].

L'objectif de cette simulation est de déterminer la valeur du champ électromagnétique en différents points de l'habitacle du véhicule, pour chaque configuration d'onde plane. Les points d'échantillonnage sont contenus dans un parallélépipède que l'on désignera par domaine de simulation. Ce pavé, noté \bar{T} , est tel que : $\bar{T} = \bar{T}_1 \times \bar{T}_2 \times \bar{T}_3$ avec $\bar{T}_1, \bar{T}_2, \bar{T}_3$ trois intervalles de la droite réelle, de longueur respective T_1, T_2 et T_3 , représentant les arêtes du pavé dans les directions des axes $(0x), (0y)$ et $(0z)$ du repère rectangulaire de référence, respectivement. Le bord de \bar{T} est situé à, au moins, $50cm (\approx 2\lambda)$ du bord du domaine occupé par l'habitacle du véhicule. Les points d'échantillonnage (ou acquisition des mesures) constituent les noeuds d'un maillage régulier de \bar{T} (Fig. 2.16), de pas $\Delta r = \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z = \Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3$, comportant $N = N_x, N_y, N_z = N_1, N_2, N_3$ mailles, avec :

$$\begin{aligned} \Delta_x = \Delta r_1 = 2.5cm, \Delta_y = \Delta r_2 = 2.5cm, \Delta_z = \Delta r_3 = 2.5cm \\ N_x = N_1 = 16, N_y = N_2 = 16, N_z = N_3 = 4 \\ T_1 = N_1 \Delta r_1 = 40cm, T_2 = N_2 \Delta r_2 = 40cm, T_3 = N_3 \Delta r_3 = 10cm \end{aligned} \quad (2.12)$$

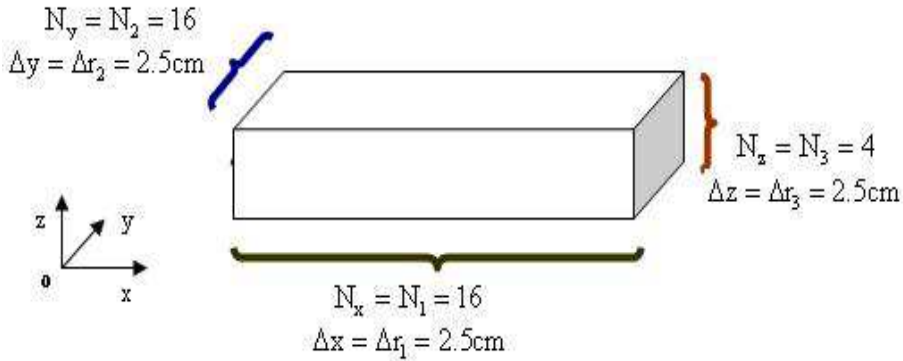


FIG. 2.16 – Points d'acquisition du champ électromagnétique dans l'habitacle de la voiture

Les parois du véhicule sont considérées comme parfaitement métalliques. L'utilisation conjointe d'une méthode de résolution temporelle FDTD et du logiciel commercial Hypermesh® permet une modélisation géométrique du véhicule (Fig. 2.17). Les détails relatifs à la méthode de simulation véhicule sont donnés dans [36]. Nous nous limitons ici à rappeler deux caractéristiques importantes de la procédure :

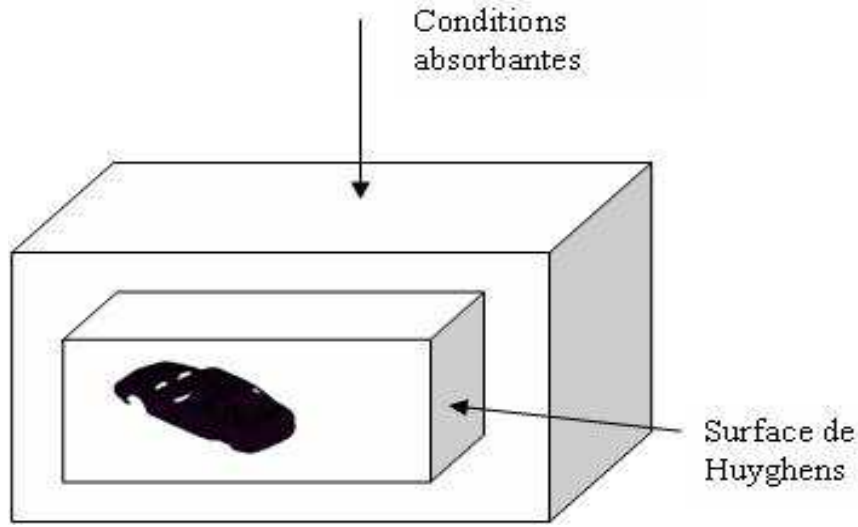


FIG. 2.17 – Résolution FDTD

- Les conditions de Mur électrique sur les bords du domaine parallélépipédique initial conduisent à un temps de calcul raisonnable. Associé à une faible occupation d'espace mémoire, ce type de conditions limites absorbantes est cependant moins efficace que l'utilisation de la technique des « Perfectly Matched Layer » (PML).
Les domaines de calcul étant limités dans les simulations numériques, les conditions aux limites absorbantes sont utilisées afin de supprimer les réflexions numériques.
- Les caractéristiques de la surface fictive (Huyghens) destinée à la génération de l'onde plane de profil temporel gaussien sont les suivantes :

$$\mathbf{f}(t; x, y, z) = A \exp \left[- \left(\frac{t - \tau_0 + \frac{(-k_1 x - k_2 y - k_3 z + \tau_r)}{c}}{\ell_s} \right)^2 \right] \quad (2.13)$$

avec :

- $A = 377.10^9 V/m$: amplitude de la gaussienne,
- (x, y, z) : position des facettes de la surface source de Huyghens,
- $\tau_0 = 1.10^{-8} s$: retard temporel,
- $\ell_s = 4.0251.10^{-10} m$: largeur caractéristique de la gaussienne,
- $\tau_r = -0.48647 m$: retard spatial,
- (k_1, k_2, k_3) : les coordonnées du vecteur d'onde k .

Les directions de propagation de ces ondes planes, réparties de manière uniforme, sont déterminées à partir d'une sphère illustrée sur la Fig. 2.18

Les valeurs temporelles du champ dans l'habitacle du véhicule sont données par la résolution FDTD

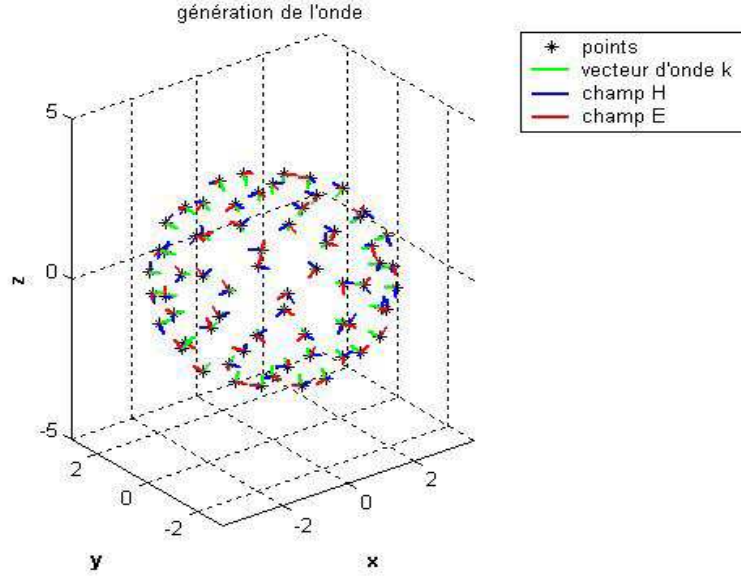


FIG. 2.18 – Ondes planes

des équations de Maxwell. Une transformée de Fourier(cf. annexe F) permet ensuite d'obtenir l'amplitude et la phase du champ électromagnétique. La fréquence maximale d'excitation est de $1.2GHz$. Il est à noter que la simulation d'un tel véhicule au moyen d'un code fréquentiel nécessiterait des ressources informatiques plus importantes.

2.2.2 Hypothèses sur le champ électromagnétique du véhicule automobile

Soit $\bar{T} \subset \mathbb{R}^3$ le domaine spatial de simulation, $\bar{F} \subset \mathbb{R}_+$ l'intervalle fréquentiel d'étude, $\mathbf{r} = (x, y, z) = (r_1, r_2, r_3)$ le point générique de \bar{T} et f celui de \bar{F} .

La source de perturbation extérieure étant aléatoire, le champ électrique dans l'habitacle l'est aussi, et donc également sa restriction au domaine $\bar{T} \times \bar{F}$ qui est un champ aléatoire $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}), \mathbf{r} \in \bar{T}, f \in \bar{F})$ indexé sur $\bar{F} \times \bar{T}$, à valeurs dans \mathbb{C}^3 . Par économie de notations et par souci de simplification, nous noterons encore $\hat{\mathbf{E}}$ le champ partiel déduit de $\hat{\mathbf{E}}$ en fixant f : $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \bar{T})$. C'est un champ aléatoire indexé sur \bar{T} et à valeurs dans \mathbb{C}^3 , tel que :

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}^R + i\hat{\mathbf{E}}^I \quad (2.14)$$

avec $\hat{\mathbf{E}}^R = (\hat{\mathbf{E}}^R(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \bar{T})$ et $\hat{\mathbf{E}}^I = (\hat{\mathbf{E}}^I(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \bar{T})$ deux champs aléatoires indexés sur \bar{T} à valeurs dans \mathbb{R}^3 , tels que :

$$\hat{\mathbf{E}}^R = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}_x^R \\ \hat{\mathbf{E}}_y^R \\ \hat{\mathbf{E}}_z^R \end{pmatrix} ; \hat{\mathbf{E}}^I = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}_x^I \\ \hat{\mathbf{E}}_y^I \\ \hat{\mathbf{E}}_z^I \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Posons :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}^R \\ \hat{\mathbf{E}}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}_x^R \\ \hat{\mathbf{E}}_y^R \\ \hat{\mathbf{E}}_z^R \\ \hat{\mathbf{E}}_x^I \\ \hat{\mathbf{E}}_y^I \\ \hat{\mathbf{E}}_z^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_1 \\ \Sigma_2 \\ \Sigma_3 \\ \Sigma_4 \\ \Sigma_5 \\ \Sigma_6 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Se donner $\hat{\mathbf{E}}$ est donc équivalent à se donner le champ aléatoire $\Sigma = (\Sigma(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \bar{T})$ indexé sur \bar{T} , à valeurs dans \mathbb{R}^6 .

Observons par ailleurs que $\hat{\mathbf{E}}$ et Σ peuvent aussi être vus comme des restrictions à \bar{T} de champs aléatoires indexés sur \mathbb{R}^3 . C'est le point de vue que nous adopterons dans toute la suite et, toujours par souci d'économie de notations, nous noterons encore $\hat{\mathbf{E}}$ et Σ ces restrictions. Donc, dorénavant, $\hat{\mathbf{E}}$ et Σ désigneront les processus $\hat{\mathbf{E}} = (\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3)$ et $\Sigma = (\Sigma(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3)$ indexés sur \mathbb{R}^3 , à valeurs dans \mathbb{C}^3 et \mathbb{R}^6 respectivement.

Notons enfin que les trajectoires des composantes de ces processus seront échantillonnées aux 1024 noeuds du maillage utilisé pour \bar{T} , et ce pour les 60 trajectoires d'ondes planes considérées.

Conformément aux tests statistiques d'adéquation aux lois théoriques (lois normale et Rayleigh) accomplis à partir des réalisations du champ prélevées dans l'habitacle du véhicule automobile, les hypothèses de Hill seront admises ici, pour $\hat{\mathbf{E}}$ et donc pour Σ , à partir de $510 MHz$ comme illustré sur la Fig. 2.19.

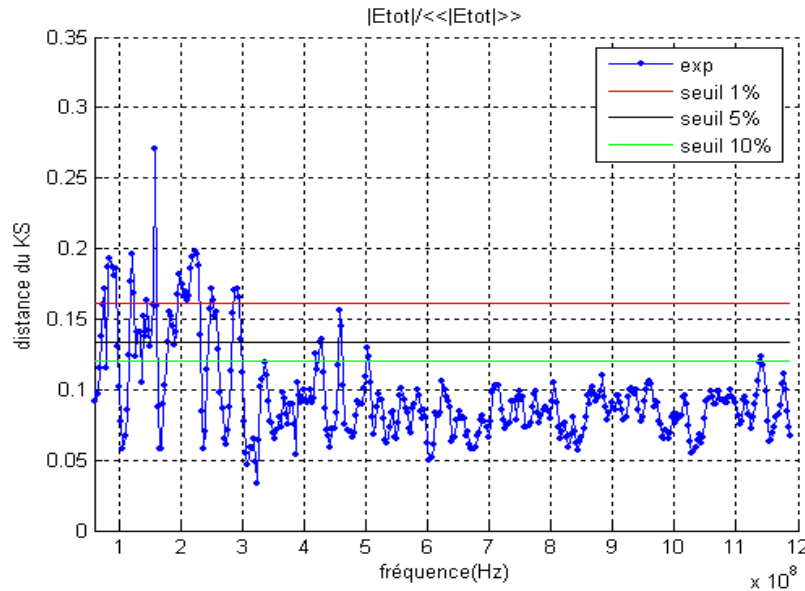


FIG. 2.19 – Test d'adéquation du KS appliqué au module champ total normalisé à sa valeur moyenne pour différentes valeurs de l'erreur de première espèce α

Le champ électrique est supposé homogène à partir de cette fréquence et, en tout point, les parties réelles

et imaginaires de ses composantes sont des variables aléatoires indépendantes dans leur ensemble et identiquement distribuées selon une loi gaussienne.

Il s'agit maintenant de disposer d'outils statistiques performants pour estimer les paramètres du second ordre (moyenne, fonction de covariance, densité spectrale de puissance) de ce champ à partir d'un échantillon de ses réalisations.

2.2.3 Estimation des paramètres du second ordre du champ aléatoire

Les paramètres du second ordre du champ aléatoire Σ sont définis par sa moyenne $\ll \Sigma \gg$, sa fonction de covariance C_Σ et sa densité spectrale de puissance (DSP) S_Σ de Σ .

En désignant par $\mathbb{E}[\cdot]$ l'opérateur espérance mathématique, par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{R}^3 et en posant :

$$-\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3),$$

$$-\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3),$$

$$-d\nu = d\nu_1, d\nu_2, d\nu_3,$$

ces grandeurs statistiques sont définies pour chaque valeur de f , comme suit :

- $\ll \Sigma \gg$ est l'élément constant de \mathbb{R}^6 tel que, $\forall \nu \in \mathbb{R}^3$:

$$\ll \Sigma \gg = \mathbb{E}[\Sigma(\mathbf{r})] \quad (2.17)$$

- C_Σ est l'application matricielle $\nu \rightarrow C_\Sigma(\nu)$ de \mathbb{R}^3 dans $\mathbb{R}^{6 \times 6}$ telle que, $\forall \nu \in \mathbb{R}^3$:

$$C_\Sigma(\nu) = \mathbb{E}[(\Sigma(\mathbf{r} + \nu) - \ll \Sigma \gg)(\Sigma(\mathbf{r}) - \ll \Sigma \gg)^T] \quad (2.18)$$

T désignant la transposée.

- S_Σ est l'application matricielle $\vartheta \rightarrow S_\Sigma(\vartheta)$ de \mathbb{R}^3 dans $\mathbb{C}^{6 \times 6}$ telle que, $\forall \vartheta \in \mathbb{R}^3$:

$$S_\Sigma(\vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} C_\Sigma(\nu) e^{-i\langle \nu, \vartheta \rangle} d\nu \quad (2.19)$$

Les termes de rangs p de $\ll \Sigma \gg$ et (p, q) de $C_\Sigma(\nu)$ et $S_\Sigma(\vartheta)$ notés respectivement $\ll \Sigma \gg_p$, $C_{pq}(\nu)$ et $S_{pq}(\vartheta)$ ont pour expressions $\forall (p, q) \in \{1, \dots, 6\}^2$:

$$\ll \Sigma \gg_p = \mathbb{E}[\Sigma_p(\mathbf{r})]$$

$$C_{pq}(\nu) = \mathbb{E}[(\Sigma_p(\mathbf{r} + \nu) - \ll \Sigma \gg_p)(\Sigma_q(\mathbf{r}) - \ll \Sigma \gg_q)] \quad (2.20)$$

$$S_{pq}(\vartheta) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} C_{pq}(\nu) e^{-i\langle \nu, \vartheta \rangle} d\nu$$

où Σ_p et Σ_q désignent respectivement les p -ème et q -ème composantes de Σ .

L'efficacité de l'estimation de ces différentes grandeurs requiert l'utilisation d'estimateurs statistiques performants. Les estimateurs que nous avons utilisés sont présentés de façon détaillée dans l'annexe E. Rappelons simplement que la donnée de base est un \mathbb{L} -échantillon $(\Sigma^{(l)}, l \in \mathcal{L})$ de copies indépendantes du champ Σ , où $\mathcal{L} = 1, \dots, \mathbb{L}$ est un ensemble fini ordonné d'indices de cardinal $\mathbb{L} \geq 1$, et que les points d'échantillonnage des éléments $\Sigma^{(l)}$ de cet échantillon sont les noeuds du maillage utilisé pour discrétiser le domaine d'étude \bar{T} (cf. paragraphe 2.2.1).

L'estimation de la fonction de covariance est une étape importante car celle-ci nous renseigne sur la dépendance entre les parties réelles et imaginaires du champ électromagnétique dans le domaine d'étude \overline{T} inclus dans l'habitacle de la voiture.

Le coefficient de corrélation entre les coordonnées Σ_p et Σ_q de Σ en un même point est donné par :

$$\rho_{pq}(0) = \frac{C_{pq}(0)}{\sqrt{C_{pp}(0)}\sqrt{C_{qq}(0)}} \quad (2.21)$$

Le coefficient de corrélation entre les coordonnées Σ_p et Σ_q de Σ en deux points distants de ν est donné par :

$$\rho_{pq}(\nu) = \frac{C_{pq}(\nu)}{\sqrt{C_{pp}(0)}\sqrt{C_{qq}(0)}} \quad (2.22)$$

Les maximums des termes diagonaux de la fonction de covariance sont obtenus à l'origine $\nu = 0$ et correspondent aux variances des coordonnées.

Rappelons que les parties réelles et imaginaires des composantes du champ électromagnétique en CRBM idéale sont supposées indépendantes : le coefficient de corrélation entre les coordonnées doit être nul. Bien entendu, les imperfections de la CRBM réelle ne permettent pas d'obtenir cette condition. Néanmoins, l'estimation de leurs valeurs et de leurs évolutions en fonction de la distance en CRBM et dans l'habitacle de la voiture constitue une information importante dans le processus de caractérisation du champ électromagnétique des deux milieux.

L'estimateur de la fonction de covariance utilisé dans cette étude sera basé sur la connaissance préalable de l'estimateur de la densité spectrale. L'estimateur de la fonction de covariance basé sur l'emploi direct des trajectoires du champ aléatoire n'est pas employé car il est moins performant.

La Fig. 2.20 montre une estimée du terme diagonal $S_{\hat{\mathbf{E}}_x \hat{\mathbf{E}}_x}^{RR}$ de la DSP de Σ vue du plan de coupe défini par $z = 2.5cm$ tandis que la Fig. 2.21 montre une estimée du terme diagonal $C_{\hat{\mathbf{E}}_z \hat{\mathbf{E}}_z}^{II}$ vue de ce même plan.

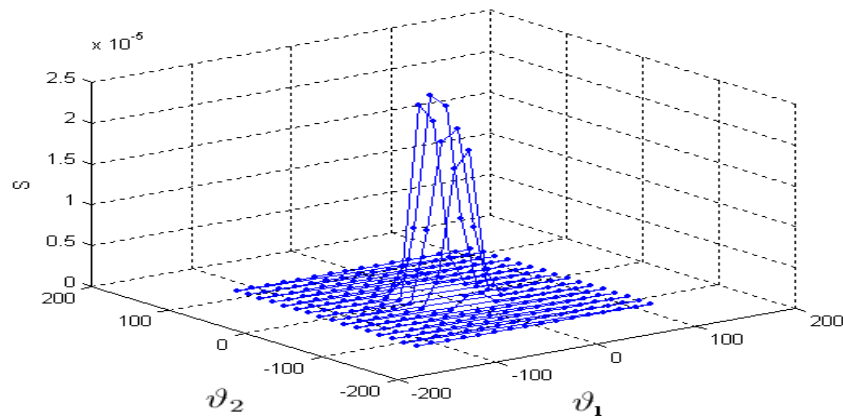


FIG. 2.20 – Terme diagonal $S_{\hat{\mathbf{E}}_x \hat{\mathbf{E}}_x}^{RR}$ de la DSP estimée dans l'habitacle du véhicule à $1.1GHz$

En $y = 17.5cm$ et $z = 7.5cm$ soit suivant une direction proche de la caisse du véhicule, nous observons

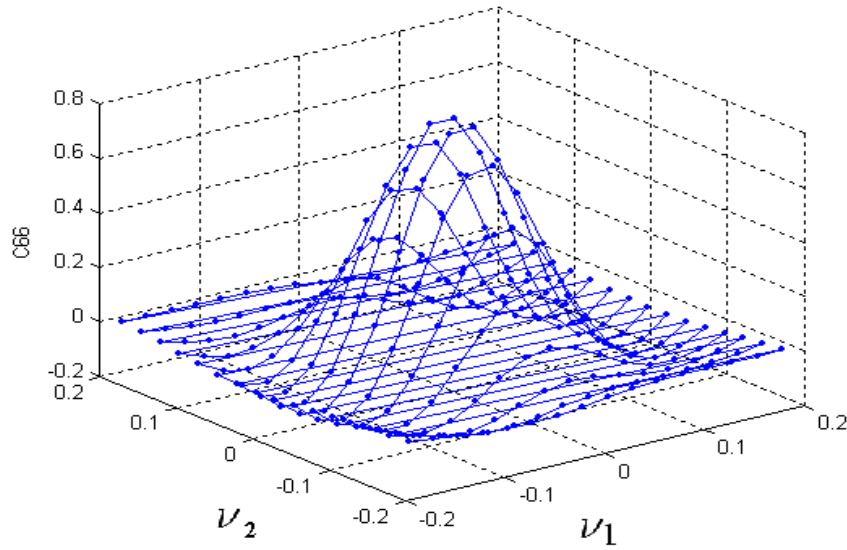


FIG. 2.21 – Terme diagonal $C_{\hat{E}_z^I \hat{E}_z^I}$ de la fonction de covariance à 1.1GHz

une corrélation relativement faible entre les parties réelles et imaginaires du champ électrique (Fig. 2.22 et Fig. 2.23).

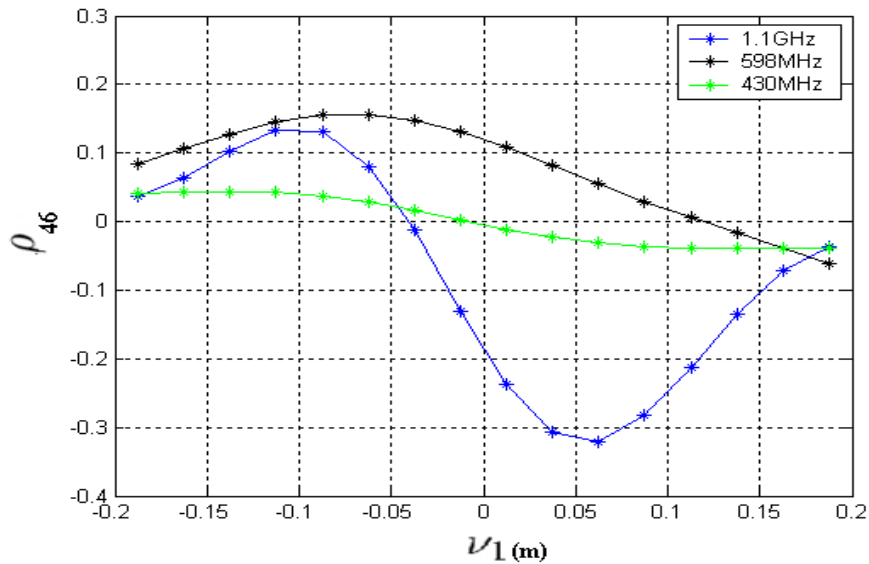


FIG. 2.22 – Coefficient de corrélation entre les composantes \hat{E}_x^I et \hat{E}_z^I près de la caisse du véhicule

La valeur maximale du coefficient de corrélation spatiale est approximativement égale à 0.15. Cette

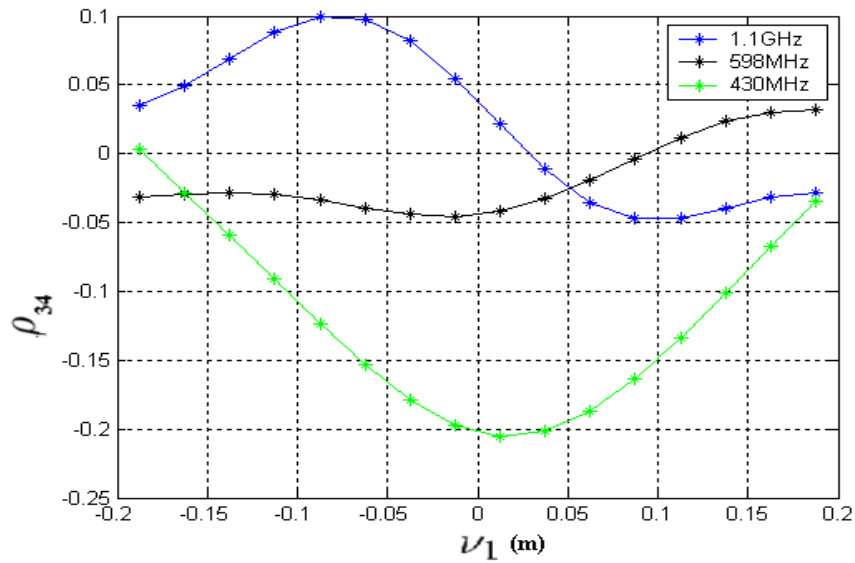


FIG. 2.23 – Coefficient de corrélation entre les composantes \hat{E}_x^I et \hat{E}_z^R près de la caisse du véhicule

corrélation devient plus faible au centre de l'habitacle du véhicule quelle que soit la fréquence, comme le montrent les figures Fig. 2.24 et Fig. 2.25 obtenues en $y = 17.5\text{cm}$ et $z = 2.5\text{cm}$.

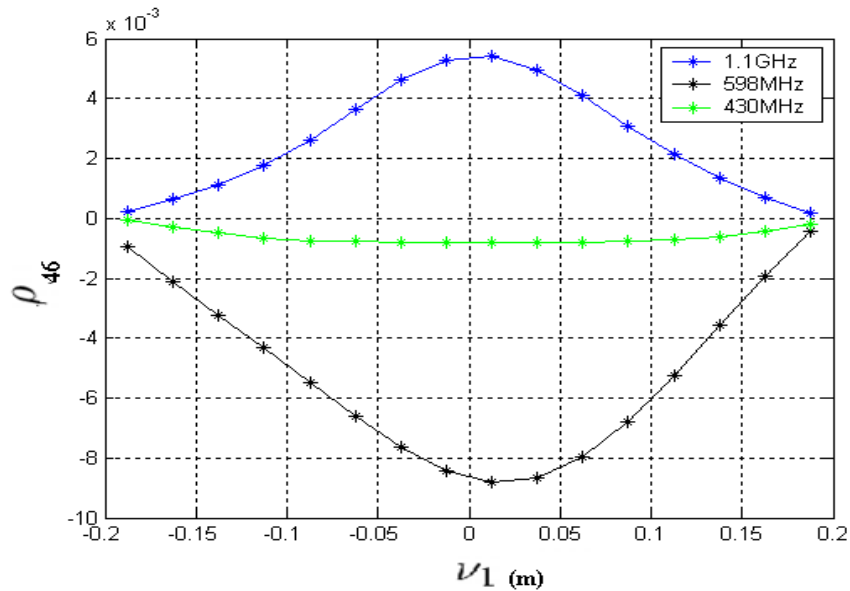


FIG. 2.24 – Coefficient de corrélation entre les composantes \hat{E}_x^I et \hat{E}_z^I au centre de l'habitacle

La valeur du coefficient de corrélation ainsi déterminée constitue un estimateur de la valeur "vraie" ρ

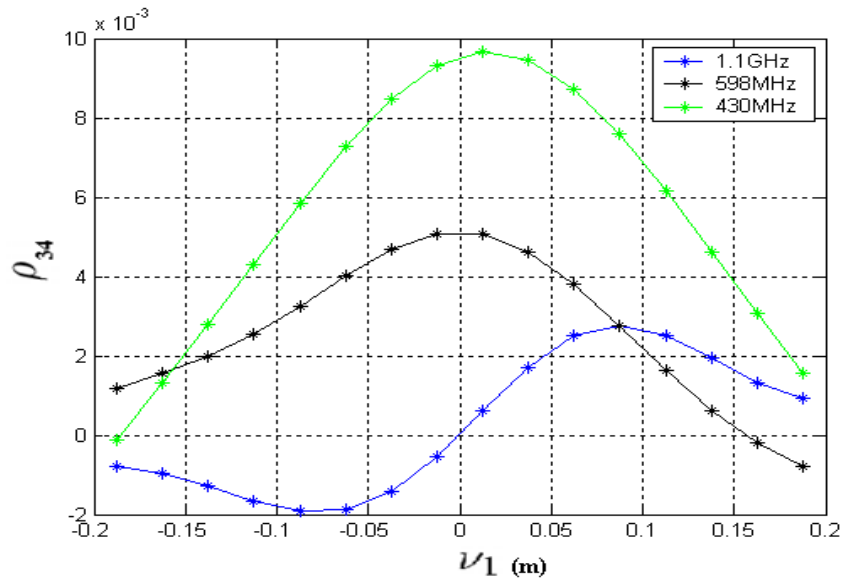


FIG. 2.25 – Coefficient de corrélation entre les composantes \hat{E}_x^I et \hat{E}_z^R au centre de l'habitacle

de ce dernier. La réalisation d'un test d'hypothèse portant sur la valeur estimée du coefficient de corrélation devient intéressante dans ce cas où les variables aléatoires sont supposées normales.

Cela revient dès lors à tester l'hypothèse : $H_0 : \rho = 0$ contre $H_1 : \rho \neq 0$.

H_0 est vraie si l'estimée de ρ est inférieure à la valeur r_{ddl}^α donnée dans la table du coefficient de corrélation [24]. Par exemple, pour un degré de liberté $ddl = 60$, les valeurs limites r_{ddl}^α , de l'estimée du coefficient de corrélation sont données dans (Tab. 2.1).

α	0.1	0.05	0.02	0.01
r_{60}^α	0.2108	0.2500	0.2948	0.3248

TAB. 2.1 – Seuil de l'estimée du coefficient de corrélation en fonction de l'erreur de première espèce α et pour un degré de liberté de 60

Les résultats obtenus portent à croire que l'indépendance des parties réelles et imaginaires du champ électrique est vérifiée au centre de l'habitacle. En revanche, la corrélation entre ces composantes devient de moins en moins faible lorsque l'on se rapproche de la caisse du véhicule et ce, quelle que soit la fréquence. D'autre part, nous ne constatons pas de dépendance linéaire entre les coefficients de corrélation d'une fréquence à une autre. D'où la nécessité de procéder, à chaque fréquence, à une estimation des paramètres.

En supposant les hypothèses de Hill vérifiées en CRBM, nous pouvons dire qu'une zone de l'habitacle du véhicule est comparable au volume utile du moyen d'essai, les dimensions de cette zone restant à préciser. En dehors de ce volume, l'influence de la caisse est caractérisée par des coefficients de corrélation plus élevés entre les parties réelles et imaginaires des composantes du champ électrique. Cette tendance se vérifie également avec les autocorrélations comme illustrée sur les Fig. 2.26 et Fig. 2.27.

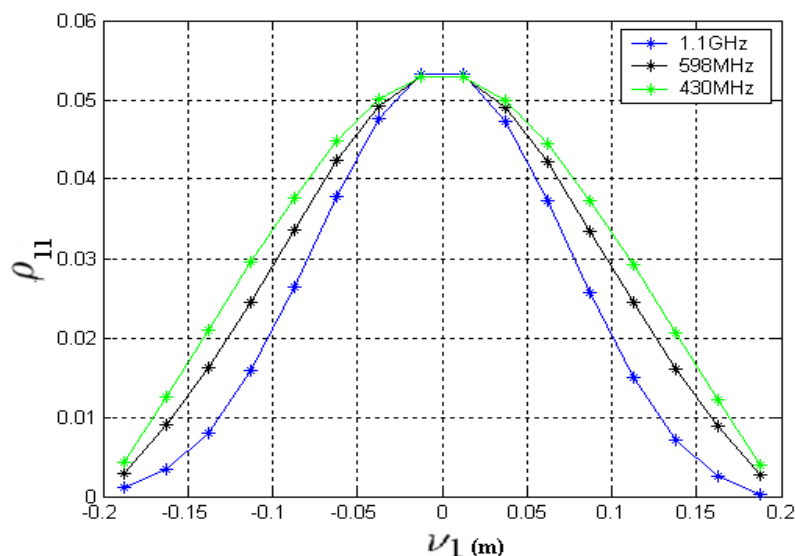


FIG. 2.26 – Coefficient de corrélation de la composante \hat{E}_x^R au centre de l'habitacle

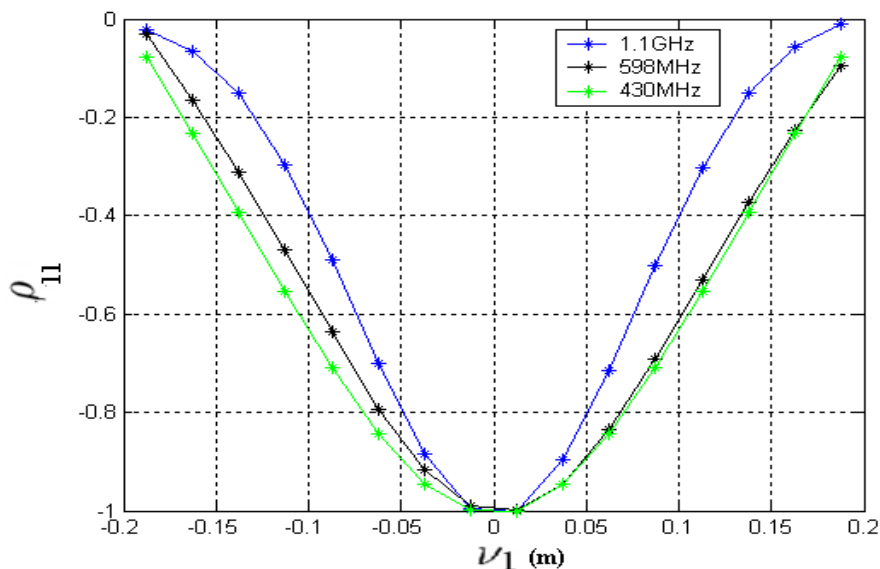


FIG. 2.27 – Coefficient de corrélation de la composante \hat{E}_x^R près de la caisse

L'estimation des paramètres du champ électrique nous renseigne donc sur les dépendances et interdépendances du champ aléatoire. Ceci n'est qu'une étape dans le processus menant vers l'identification et la modélisation probabiliste du champ électrique. Les outils d'estimation d'un champ aléatoire homogène sont ici présentés via une application au champ électromagnétique aléatoire dans un véhicule automobile, les coordonnées canoniques de ce champ étant gaussiens. Si le champ à estimer n'est pas gaussien, la première étape, avant l'utilisation des algorithmes, consistera à faire une normalisation gaussienne du champ aléatoire, i.e. déterminer une relation entre la matrice de covariance de ce champ et celle de la loi gaussienne.

Conclusion

Dans ce chapitre a été proposée une comparaison entre les paramètres probabilistes caractérisant l'environnement électromagnétique d'un véhicule automobile et ceux d'un environnement dans une CRBM. Dans cette approche, la comparaison proposée porte sur les densités de probabilité du champ électromagnétique en CRBM et dans le véhicule automobile. Cette étude a été réalisée à partir des estimées de la densité de probabilité issues des données expérimentales pour la CRBM, et de résultats de simulations numériques pour le véhicule automobile illuminé par une onde électromagnétique extérieure. Ces données, fournies par PSA, peuvent ainsi prétendre à donner lieu à des conclusions réalistes.

La première étude concerne une comparaison statistique dans l'habitacle véhicule et dans le volume utile de la CRBM. Après estimation de la densité de probabilité des modules du champ électrique aux différentes fréquences pour lesquelles on dispose de données numériques, la concordance, entre les estimées expérimentales et les lois en CRBM, s'est avérée satisfaisante à partir de 433 MHz . Ces premiers résultats sont importants vis-à-vis des protocoles de mesures en immunité des dispositifs situés dans l'habitacle du véhicule (équipements, stimulateurs de passagers,...), ainsi que pour la détermination des paramètres d'exposition pour l'évaluation des risques sanitaires (mesures du DAS). Par ailleurs, les équipements électroniques, et plus particulièrement les faisceaux électriques ne sont pas localisés dans le volume central de l'habitacle véhicule, mais le long de la caisse du véhicule. Nous avons donc été amenés à analyser les paramètres de l'environnement électromagnétique à l'emplacement des faisceaux électriques. Pour les différentes valeurs de fréquences étudiées, les parties réelles et imaginaires des composantes du champ électrique ne suivent pas une loi gaussienne. Par conséquent, les modules des composantes du champ électrique ne suivent pas une loi de Rayleigh d'ordre 2, et la fonction de répartition du module du champ électrique induit à l'emplacement des faisceaux est différente de celle estimée dans le volume central de l'habitacle du véhicule. L'environnement électromagnétique des équipements électroniques situés à proximité de la caisse du véhicule, est donc statistiquement différent de l'environnement CRBM. En outre, ces résultats mettent en évidence la nécessité de préciser l'utilisation d'un plan de masse dans les protocoles de mesure de l'immunité des équipements en CRBM. Il serait également intéressant de réaliser une comparaison des paramètres statistiques de l'environnement interne au véhicule, à l'emplacement des faisceaux électriques, et de l'environnement CRBM, à proximité des parois.

L'environnement électromagnétique au centre du véhicule est donc comparable à celui d'une CRBM à partir d'une valeur de fréquence dépendant des dimensions du véhicule. Cette étude n'ayant été réalisée qu'à partir de quelques valeurs de fréquences, elle ne peut conduire à une détermination précise de cette limite, d'où l'intérêt de disposer de données sur une large gamme de fréquences. Or, l'évaluation de tels résultats par un code fréquentiel conduit à des temps de calculs prohibitifs. C'est pourquoi, nous avons fait le choix, dans une seconde partie, de compléter cette étude par l'analyse de résultats d'un code temporel.

L'utilisation d'estimateurs statistiques performants a été proposée pour l'estimation des paramètres statistiques du second ordre (moyenne, densité spectrale de puissance, fonction de covariance) du champ électromagnétique à l'intérieur d'un véhicule automobile, soumis à une source de caractéristiques aléatoires. Il en a été déduit les estimées du coefficient de corrélation des parties réelles et imaginaires des composantes du champ électrique, qui semblent montrer une absence de corrélation spatiale entre ces variables. Cette étude correspond à la vérification des hypothèses, c'est-à-dire à la première étape de la mise en oeuvre du processus d'identification et de modélisation de champ aléatoire.

Une autre application de cette méthode que l'on pourrait envisager s'il était possible de disposer d'échan-

tillons de tailles suffisantes, serait l'étude de l'environnement électromagnétique en CRBM. L'objectif serait alors de vérifier, notamment, la validité du modèle théorique de Hill, à savoir l'importance du degré de corrélation entre les parties réelles et imaginaires du champ électromagnétique au sein du volume utile de la CRBM.

Ces travaux pourraient également aboutir à une vérification des expressions analytiques du coefficient de corrélation spatiale données dans [35] et [18].

Un second objectif serait de procéder à une identification du champ aléatoire afin de construire un modèle réaliste du champ électromagnétique en CRBM. Cependant une modélisation probabiliste acceptable en CRBM nécessiterait la connaissance des parties réelles et imaginaires des composantes du champ, ce qui n'est pas réalisable d'un point de vue expérimental, seuls les modules des composantes du champ étant accessibles par la mesure. L'identification du champ électromagnétique devra alors utiliser des techniques de simulation spécifique basées sur des méthodes de résolution temporelles ou fréquentielles, ce qui nécessite des ressources informatiques dont nous ne disposons pas à l'heure actuelle notamment du fait de la modélisation des différents éléments présents dans la CRBM (brasseur, cavité). De plus, une modélisation déterministe s'avère coûteuse pour des études en hautes fréquences dans la CRBM. Ainsi, dans le chapitre suivant, est proposée une nouvelle approche pour l'estimation des paramètres du second ordre du champ électrique dans le volume utile de la CRBM.

Chapitre 3

Analyse comportementale de la CRBM par une méthode de collocation stochastique

Sommaire

3.1	Modèle déterministe d'une Chambre Réverbérante à Brassage de Modes	78
3.1.1	Sur l'importance du coefficient de qualité et sa relation avec la conductivité des parois	78
3.1.2	Modélisation déterministe de la CRBM	81
3.2	Définition d'un modèle probabiliste d'une Chambre Réverbérante à Brassage de Modes	88
3.2.1	Analogie probabiliste	88
3.2.2	Loi de distribution de la conductivité des parois de la CRBM	89
3.3	Résolution des équations de Maxwell par une méthode de collocation stochastique	90
3.3.1	La méthode de collocation déterministe	90
3.3.2	Application d'une méthode de collocation stochastique aux équations de Maxwell	93
3.3.3	Approximation des caractéristiques statistiques du second ordre du champ électrique aléatoire	95
3.4	Application de la méthode de collocation stochastique à l'analyse comportementale de la Chambre Réverbérante à Brassage de Modes	97
3.4.1	Détermination des points de collocation	98
3.4.2	Résolution des équations de Maxwell-Modélisation de la cavité	98
3.4.3	Evolution du champ électrique en fonction des points de collocation	99
3.4.4	Estimation de la moyenne et de l'écart-type	100
3.4.5	Valeurs expérimentale et théorique du coefficient de variation du champ électrique	102
3.4.6	Intervalle de confiance du coefficient de variation du champ électrique	103
3.5	Application de la méthode de collocation à l'étude de l'émission d'un dipôle en CRBM	107
3.5.1	Analogie probabiliste entre le brasseur et le coefficient de qualité	108
3.5.2	Estimation du courant par une méthode des moments basée sur la fonction de Green des cavités	110
3.5.3	Influence de la cavité sur la distribution du courant le long du dipôle	115
3.5.4	Influence de la cavité sur la résistance interne du dipôle et la puissance d'alimentation	116

3.5.5	Estimation de la moyenne des paramètres intrinsèques au dipôle par une méthode de collocation stochastique	118
-------	--	-----

L'accroissement des performances des outils informatiques et le développement de techniques de modélisation déterministe permettent aujourd'hui de simuler des systèmes complexes, en intégrant différents phénomènes physiques simultanés intervenant à des échelles variables. Cette évolution est liée au besoin d'obtenir une information de plus en plus précise sur le comportement du système étudié. Dans de nombreux cas, une caractérisation statistique (moyennes, premiers moments,...) du système peut se révéler plus pertinente, soit en raison d'une nature intrinsèquement stochastique, soit du fait d'une méconnaissance du système réel, ou encore de difficultés expérimentales dans l'estimation des paramètres de la configuration étudiée. Si l'on connaît les distributions statistiques des diverses données incertaines du problème, il est alors possible de déterminer l'incertitude des valeurs issues de la simulation numérique. Les objectifs de la quantification de l'impact des incertitudes lors d'une simulation sont, entre autres, de fournir des barres d'erreur numériques facilitant la comparaison avec des observations expérimentales. Ceci permet de mieux juger de la qualité des modèles physiques employés, d'identifier les paramètres incertains ayant l'impact le plus fort sur les résultats de simulation, et devant donc être mesurés ou contrôlés avec le plus de précision. Il est également envisageable de mener une analyse de sûreté (probabilité de dépassement de valeurs critiques), et de jauger du degré de confiance que l'on peut accorder aux calculs, lors de la prise de décisions de conception, par exemple.

Pour remplir ces différents objectifs, des méthodes spectrales [49] basées sur la théorie du chaos homogène et le développement de fonctions aléatoires sur une base de polynômes chaos, ont été développées (Wiener, Cameron et Martin). Ces techniques, bien que fondées sur des bases relativement anciennes, ont émergé comme techniques de quantification d'incertitudes à la suite des travaux de Ghanem et Spanos sur les éléments finis stochastiques appliqués aux problèmes en élasticité. A la suite de ces premiers travaux, le développement de solutions numériques sur des bases de polynômes de chaos a rapidement gagné en popularité et a été adapté aux problématiques rencontrées dans différents domaines : thermique, écoulements dans des milieux poreux, génie chimique, ...

Les techniques spectrales permettent de représenter de manière beaucoup plus compacte la dépendance de la solution vis-à-vis des paramètres incertains. De plus, le format de la représentation spectrale permet une analyse plus fine des effets conjugués de plusieurs paramètres. Comparativement aux techniques de type Monte-Carlo, par lesquelles l'analyse de l'influence de multiples paramètres incertains se révèle impossible du fait de la quantité élevée de réalisations nécessaire pour obtenir des statistiques convergentes, les qualités des représentations spectrales ne présentent en fait une supériorité réelle que si le calcul numérique des modes stochastiques n'est pas associé à un coût prohibitif : l'exploitation des avantages potentiels de la représentation spectrale passe par le développement et la mise au point de techniques numériques adaptées.

Les méthodes spectrales ont été introduites afin d'obtenir une précision élevée lors de la résolution numérique des équations différentielles. L'idée initiale consistant à utiliser une décomposition du champ en série de Fourier tronquée [50] ne permet pas de prendre en compte des conditions aux limites non périodiques. Les bases de fonctions circulaires ont été rapidement remplacées par la suite par des bases de polynômes orthogonaux (polynômes de Chebyshev ou de Legendre,...) ce qui a conduit à l'introduction de méthodes appelées pseudo-spectrales. Ces approches entrent dans la classe des méthodes de collocation, pour lesquelles la solution numérique doit satisfaire l'équation écrite sous forme différentielle en un ensemble de points convenablement choisis, rendant ainsi les simulations moins coûteuses.

Si l'on s'intéresse plus précisément aux problématiques rencontrées en CEM, le besoin d'identification et de modélisation de paramètres incertains s'avère primordial pour la prédiction de la mesure et

l'élaboration de techniques de protection. La connaissance des incertitudes liées aux différents moyens d'essai est également essentielle pour une bonne interprétation des mesures. Cependant, la modélisation et l'identification font appel à une phase d'estimation de certains paramètres, nécessitant un grand nombre d'échantillons. Or, ces derniers peuvent difficilement être obtenus expérimentalement en raison des temps de mesure importants et de l'inaccessibilité de certaines informations (par exemple : les parties réelles et imaginaires du champ électromagnétique en CRBM).

Ces considérations sont en particulier valables pour les CRBM dont la simulation déterministe s'avère coûteuse et délicate. En effet, la modélisation numérique de CRBM à partir de méthodes fréquentielles ou temporelles représente le sujet de nombreuses investigations, ceci dans le but d'approfondir l'analyse de la structure en présence ou non de l'objet sous test. Pour reproduire au mieux les conditions expérimentales, il est alors indispensable de prendre en compte la rotation du brasseur. Afin d'assurer une efficacité de brassage optimale, la grande majorité des brasseurs présente des géométries complexes. Or, pour la plupart des approches temporelles volumiques comme celles basées sur les schémas différences finies classiques ou des schémas TLM (Théorie des Lignes de transmission Multifilaires), la discrétisation cartésienne des objets est dans ce cas un handicap. Les méthodes surfaciques fréquentielles conformes peuvent relever ce défi. Toutefois ces dernières sont plus coûteuses en termes de temps de calcul, et une discrétisation fine du brasseur se fera au détriment de la prise en compte d'éventuels équipements sous test. Il semble alors judicieux de développer une méthodologie dont l'objectif est de s'affranchir de la modélisation explicite du brasseur, sans pour cela voiler la représentativité des champs électromagnétiques présents dans la CRBM étudiée.

De plus, l'incertitude sur les différents paramètres caractérisant les pertes de la structure, rend alors quasi indispensable le recours aux méthodes statistiques pour une meilleure modélisation du champ électromagnétique. Le champ en CRBM est régi par les équations de Maxwell : les solutions aléatoires peuvent être obtenues, par les méthodes de collocation, en un ensemble de points convenablement choisis, rendant ainsi les simulations moins coûteuses. L'identification d'un paramètre aléatoire devient alors important pour la détermination des points dits « points de collocation ». Notre choix s'est alors naturellement porté sur la conductivité des parois de la CRBM pour des raisons évoquées dans le paragraphe 3.2.1.

Un modèle de la conductivité a ainsi été proposé pour la résolution des équations de Maxwell par une méthode de collocation. L'utilisation d'une telle méthode permet une simulation de la CRBM en l'absence du brasseur ainsi qu'une introduction directe des pertes dans la résolution FDTD des équations de Maxwell en vue de l'estimation des moments du premier ordre du champ électrique dans le volume utile de la CRBM.

La deuxième partie de ce chapitre porte sur l'application d'une méthode de collocation pour l'estimation des paramètres intrinsèques à un dipôle placé dans une CRBM. Dans l'équation de Hallen permettant d'évaluer le courant le long du dipôle, l'utilisation de la fonction de Green des cavités permet de nous affranchir de la simulation de la cavité. De plus, un modèle probabiliste du coefficient de qualité de la CRBM est proposé, évitant la prise en compte de la rotation du brasseur de modes.

3.1 Modèle déterministe d'une Chambre Réverbérante à Brassage de Modes

3.1.1 Sur l'importance du coefficient de qualité et sa relation avec la conductivité des parois

La Chambre Réverbérante à Brassage de Modes est une cavité parallélépipédique blindée, exploitable tant que ses dimensions restent grandes devant la longueur d'onde. L'utilisation de la CRBM est liée à l'excitation des modes résonnants de la cavité, toute cavité métallique pouvant entrer en résonance à certaines fréquences définies par ses dimensions (Eq. 1.1).

Afin de prévoir la génération d'un champ électromagnétique homogène et isotrope, la densité de modes doit être suffisamment élevée pour assurer le recouvrement des différentes courbes de résonance correspondant aux modes excités. L'une des premières règles à observer est d'éviter les dégénérescences dimensionnelles, et donc d'utiliser des cavités parallélépipédiques. Cependant, aussi élevée que soit la densité de modes, il existe toujours des fréquences pour lesquelles le niveau de champ électromagnétique généré reste faible. Par conséquent, les CRBM sont équipées de brasseurs de modes permettant de modifier les conditions aux limites de la cavité, et ainsi de modifier légèrement les valeurs des fréquences de résonance. Chaque position du brasseur correspond à une configuration électromagnétique propre à laquelle sont associées de nouvelles fréquences de résonance. Le fonctionnement d'une CRBM est donc conditionné par une densité de modes suffisante qui permet de réduire l'écart en fréquences entre deux modes de résonance, et un brassage efficace. Dans les basses fréquences où la longueur d'onde est nettement supérieure aux dimensions de la cavité, aucune résonance propre à la cavité n'est excitée. Cependant, d'autres paramètres sont liés au recouvrement des modes, et en particulier le coefficient de qualité de la CRBM qui dépend de la capacité de la structure à emmagasiner de l'énergie, ainsi que de la dissipation de puissance à l'intérieur de la cavité. Pour chaque mode de résonance excité à une fréquence f , ce facteur est donné par :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \quad (3.1)$$

où Δf est la largeur à mi-hauteur de la courbe de résonance ; ce paramètre peut donc être déterminé uniquement si les courbes de résonance sont bien identifiées.

Il peut également s'exprimer sous la forme :

$$Q = \frac{\omega U}{P_d} \quad (3.2)$$

où ω est la pulsation, U est l'énergie emmagasinée et P_d est la puissance dissipée.

Selon le principe de conservation de l'énergie, la puissance dissipée est considérée équivalente à la puissance transmise par une antenne d'émission placée au sein de la CRBM. Si la valeur quadratique moyenne du champ électrique total $\ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^2 \gg$ à l'intérieur de la cavité est constante dans tout le volume de la chambre, alors $\ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^2 \gg$ peut être reliée à la puissance transmise P_t par le facteur de qualité Q .

Dans ce cas, la densité moyenne d'énergie de la chambre $\ll W \gg$ peut être exprimée par la relation :

$$\ll W \gg = \ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^2 \gg \varepsilon \quad (3.3)$$

où ε est la permittivité du milieu interne à la cavité.

De plus, l'énergie emmagasinée est liée au volume de la chambre et à la densité moyenne d'énergie. Elle peut s'exprimer par l'équation :

$$\ll U \gg = \ll W \gg V = \ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^2 \gg \varepsilon V \quad (3.4)$$

où V est le volume de la CRBM.

Dès lors, si l'énergie transmise P_t est équivalente à l'énergie dissipée, à partir des équations (3.2) et (3.4), nous obtenons :

$$\ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^2 \gg = \frac{\ll Q P_t \gg}{\omega \varepsilon V} \quad (3.5)$$

Ainsi, en considérant l'antenne de réception parfaitement adaptée dans la gamme de fréquences considérée, la moyenne de la puissance mesurée sur une révolution du brasseur est donnée par [30] :

$$\ll P_r \gg = \frac{\lambda^2 \ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^2 \gg}{8\pi Z_0} \quad (3.6)$$

où Z_0 est l'impédance de l'onde.

Dans une cavité sans brasseur, il existe plusieurs sources de dissipation d'énergie [44] :

- les pertes associées à la dissipation d'énergie dans les parois, associées à la puissance P_{d1} ,
- les pertes engendrées par les ouvertures, associées à la puissance P_{d2} ,
- les pertes dues à l'absorption d'énergie par les objets présents dans la cavité, associées à la puissance P_{d3} ,
- les pertes dues aux charges des antennes de réception, associées à la puissance P_{d4} .

La puissance totale dissipée dans la CRBM, P_{dt} , est alors donnée par :

$$P_{dt} = P_{d1} + P_{d2} + P_{d3} + P_{d4} \quad (3.7)$$

Chacun de ces termes correspond à un coefficient de qualité partiel : $Q_i = \frac{\omega U}{P_{di}}$ ($i = 1 \dots 4$). Le coefficient de qualité théorique total Q est alors défini comme suit :

$$\frac{1}{Q} = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{Q_i} \quad (3.8)$$

Compte tenu de l'expression de la puissance P_{d1} , associée à la dissipation d'énergie dans les parois, établie en considérant des parois constituées de matériaux très conducteurs, Q_1 est donné par :

$$Q_1 = \frac{3V}{2\mu_r \delta S} \quad (3.9)$$

où $\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu_0 \mu_r \sigma f}}$ désigne l'épaisseur de peau, V est le volume de la chambre, S est la surface des parois, μ_r et σ correspondent respectivement à la perméabilité relative et la conductivité des parois. f représente la fréquence d'étude.

Il est généralement reconnu que la contribution des termes P_{d2} et P_{d3} est négligeable : en pratique, les

dissipations d'énergie se produisant via les défauts de faradisation, les ouvertures et les équipements (câbles, sonde, ...) présents dans la structure restent minimales. En revanche, le coefficient de qualité théorique caractérisant les pertes dues à la présence d'antennes doit être impérativement pris en compte :

$$Q_4 = \frac{16\pi^2 V}{m\eta\lambda^3} \quad (3.10)$$

avec m représentant le nombre d'antennes et η l'efficacité de l'antenne.

Dans le cas d'une CRBM, le coefficient de qualité Q varie d'une position à l'autre du brasseur ; il en est de même pour Q_1 .

La Fig. 3.1 présente les variations en fonction de la fréquence des facteurs $\ll Q_1 \gg$, Q_4 et $\ll Q \gg$.

La valeur du coefficient de qualité total $\ll Q \gg$, issue de l'éq. 3.5, a été obtenue à partir de mesures du champ électrique total en 80 points du volume utile de la CRBM du LASMEA, et pour 51 positions de brasseur. Le facteur Q_4 correspond à la présence de l'antenne d'émission, antenne log-périodique dont le rendement est estimé à 0.75 [64].

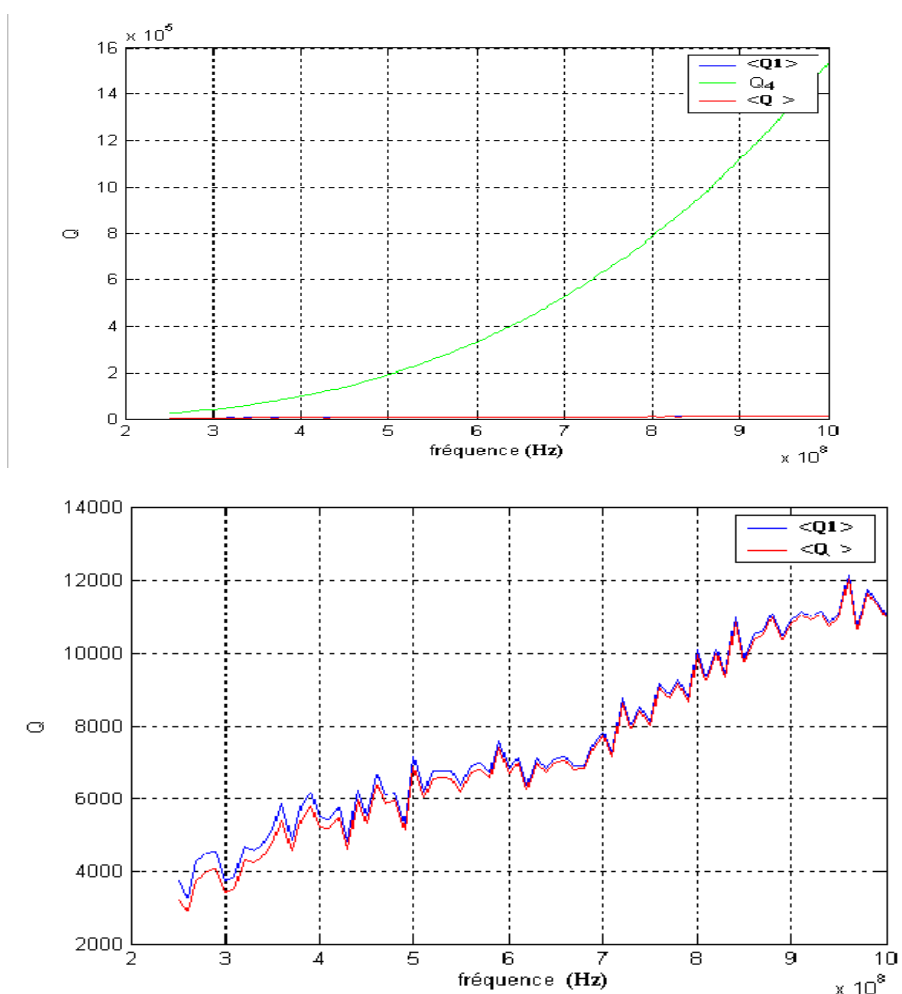


FIG. 3.1 – Coefficient de qualité de la CRBM du LASMEA

Le facteur de qualité lié à la présence de l'antenne d'émission étant prépondérant, nous pouvons assimiler, dans la gamme de fréquences étudiée, le coefficient de qualité total de la CRBM au facteur caractérisant les pertes dans les parois de la structure. Par conséquent, la valeur de la conductivité des murs de l'enceinte, inconnue a priori, peut être obtenue par la formule suivante :

$$\ll \sigma \gg = \frac{S^2 f}{8100\pi\mu_0 c^2 P_t^2} \ll \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^4 \gg \quad (3.11)$$

Ne pouvant pas dissocier, expérimentalement, la puissance transmise de la puissance injectée, l'hypothèse : $P_t = P_{inj}$ sera considérée.

Le facteur de qualité, directement lié à la conductivité des parois de la CRBM, représente un paramètre essentiel. En effet, il permet de caractériser le signal généré dans le moyen d'essai considéré (amplitude, largeur de bande), d'où la mise au point de méthodologies consistant à utiliser le facteur de qualité pour l'intégration des pertes de la CRBM dans les simulations numériques temporelles [36, 37, 39]. La mesure du champ électrique, pour chaque fréquence étudiée, permet d'après Eq.3.11, d'obtenir une valeur moyenne de la conductivité pouvant être directement utilisée dans des simulations déterministes.

3.1.2 Modélisation déterministe de la CRBM

La modélisation d'une cavité à parois métalliques s'appuie sur la résolution numérique des équations de Maxwell, complétée par l'application des conditions aux limites au niveau de l'interface métal/air. Connaissant maintenant la valeur moyenne de la conductivité des parois dans le domaine de fréquences exploré, il devient possible d'envisager la réalisation de simulations numériques à partir de valeurs réalistes des paramètres de la CRBM.

3.1.2.1 Equations de Maxwell

Le système des équations de Maxwell a historiquement été obtenu en généralisant au cas des champs et courants variables (dépendant du temps), les équations ponctuelles (ou différentielles) exprimant les théorèmes fondamentaux de l'électrostatique et de la magnétostatique [63]. Le système des quatre équations de Maxwell peut être considéré comme formé de deux groupes indépendants de deux équations : un groupe concernant les excitations électrique et magnétique, ainsi que les charges et les courants électriques :

$$\begin{cases} \text{div}(\mathbf{D}) = \rho_c \\ \text{rot}\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = J \end{cases} \quad (3.12)$$

et un groupe concernant les champs électrique et magnétique :

$$\begin{cases} \text{div}(\mathbf{B}) = 0 \\ \text{rot}\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

avec :

- \mathbf{E} : le champ électrique (V/m),
- \mathbf{H} : l'excitation magnétique (A/m),

- \mathbf{D} : une induction électrique (C/m^2),
- \mathbf{B} : le champ magnétique (T),
- ρ_c : la densité de charges (C/m^3),
- J : la densité de courant électrique (A/m^2).

On peut donc considérer, comme le suggère le premier groupe d'équations, que les «sources» (charges et courants électriques) créent en tout point de l'espace, des vecteurs excitations indépendants du milieu dans lequel ils sont définis, alors que les forces électromagnétiques s'exerçant sur d'autres sources sont liées aux vecteurs champs. Pour pouvoir passer de l'effet à la cause (c'est-à-dire des sources aux forces), il manque un maillon à la chaîne, à savoir un groupe de relations permettant de relier, en tout point, les excitations avec les champs. De telles relations, qui font intervenir les propriétés électromagnétiques du milieu matériel, sont appelées «équations constitutives» et sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \end{cases} \quad (3.14)$$

ε et μ représentant respectivement la permittivité électrique (F/m) et la perméabilité magnétique du milieu (H/m).

Les équations de Maxwell écrites sous forme différentielles ou intégrales peuvent être résolues soit dans le domaine temporel soit dans le domaine fréquentiel.

3.1.2.2 Résolution numérique des équations de Maxwell et modélisation déterministe de la CRBM

De nombreuses méthodes numériques ont été développées pour la résolution des équations de Maxwell. Leur efficacité, voire leur précision, est cependant affectée lorsque les géométries et les matériaux mis en oeuvre deviennent trop complexes : le choix étant déterminé essentiellement par le type d'application considéré. En ce qui concerne les problèmes de grande taille en l'occurrence la CRBM, la méthode utilisée doit intégrer le maximum de paramètres dans la résolution ; les difficultés majeures étant liées à l'intégration des pertes et à l'optimisation du temps de calcul.

Comme précédemment mentionné, on peut distinguer deux grands types de formulation des équations de Maxwell :

- la formulation harmonique (ou dans le domaine fréquentiel),
- la formulation en temps écrite directement à partir des équations de Maxwell-Faraday (Eq.3.13) et de Maxwell-Ampère (Eq.3.12).

Le choix d'une formulation et des méthodes numériques nécessaires à la résolution du problème posé dépendent des configurations étudiées.

Pour la modélisation du champ électromagnétique en CRBM, les méthodes fréquentielles ont l'avantage de donner des résultats plus immédiats pour la comparaison avec les mesures. Elles permettent notamment une prise en compte naturelle des valeurs des différents paramètres (conductivité,...) qui varient avec la fréquence.

Dans un problème avec sources, la méthode numérique la plus souvent utilisée pour la résolution des équations de Maxwell écrites sous forme intégrale est la méthode des moments (MoM). Cette méthode,

adaptée à l'électromagnétisme par Harrington en 1968, ne nécessite que le maillage des éléments du système. Cependant elle requiert d'importantes ressources informatiques et nécessite autant de simulations que de fréquences étudiées, contrairement aux méthodes temporelles qui permettent de travailler sur une large gamme de fréquences.

En CRBM, les techniques temporelles sont les plus populaires car elles permettent d'exciter la cavité sur une large gamme de fréquences à l'aide d'un signal impulsionnel. Les méthodes temporelles de résolution, en coordonnées cartésiennes, des équations de Maxwell habituellement utilisées sont :

- le schéma Finite Difference Time Domain (FDTD) : La méthode des différences finies correspond à la résolution directe des équations de Maxwell en discrétisant les espaces cartésien et temporel. Les éléments du maillage sont donc tous parallélépipédiques. L'inconvénient majeur est, par conséquent, la non-conformité du maillage aux surfaces courbes. En revanche, elle prend facilement en compte les milieux inhomogènes.
- le schéma Finite Volume Time Domain (FVTD) : La méthode des volumes finis permet un maillage conforme du système. Cependant, les coûts en termes de ressources informatiques sont plus importants.

La modélisation des CRBM présente cependant un problème lié à toutes les techniques temporelles : la prise en compte des pertes de la CRBM.

L'un des critères permettant de choisir parmi les nombreuses méthodes numériques de résolution des équations de Maxwell, concerne la description correcte des matériaux impliqués en respectant leurs propriétés électromagnétiques (permittivité, perméabilité, conductivité) de manière isotrope ou non. Les méthodes temporelles FDTD et FVTD entre autres, respectent parfaitement cette condition. En outre, leur capacité à accepter des études sur de larges gammes de fréquences leur confère un avantage important pour l'étude d'une CRBM, par rapport aux techniques fréquentielles. De plus, le recalage en puissance de la source d'excitation peut également être traité avec plus ou moins de facilité selon la technique choisie. L'intégration complète des différents éléments constitutifs d'une CRBM nécessite de tenir compte à la fois des caractéristiques physiques et géométriques de la CRBM ainsi que des différents éléments qui la composent.

Jusqu'à présent, deux formalismes d'intégration des pertes en CRBM réelle sont utilisées :

- la méthode des pertes «modélisées»
- la méthode des pertes «simulées»

Méthode des pertes «modélisées»

L'approche la plus naturelle pour modéliser une CRBM réelle (par opposition à une cavité idéale) est de modéliser les pertes par effet Joule des éléments conducteurs (parois, pales) par l'introduction d'une conductivité finie. Toutefois l'utilisation directe d'une méthode numérique de type FDTD ou FVTD conduirait à un pas de discrétisation extrêmement faible dans les conducteurs. Par exemple, pour une conductivité électrique $\sigma = 10^7 S/m$ et une fréquence de $1GHz$, la taille de cellule serait : $\delta x = \delta y = \delta z = 2,23\mu m$ en FDTD.

De même, pour satisfaire le critère de stabilité des schémas numériques explicites, le pas de temps imposé par les conducteurs serait très faible vis-à-vis de celui relatif à la propagation en espace libre. Nous nous

sommes ainsi orientés vers le choix d'une méthode différentielle dans le domaine temporel, complétée par une condition aux limites de type impédance surfacique (Surface Impedance Boundary Condition, SIBC en anglais). Cette dernière peut alors être utilisée afin de limiter le nombre de cellules volumiques utilisées pour modéliser des objets diélectriques à pertes.

La condition aux limites d'impédance de Leontovich du premier ordre relie ainsi les composantes de champ tangentiel total entre elles et s'écrit, pour une fréquence de travail fixée :

$$\hat{\mathbf{E}}_{tang}(\omega; \mathbf{r}) = Z_s(\omega; \mathbf{r}) \left[\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}_{tang}(\omega; \mathbf{r}) \right] \quad (3.15)$$

où ω et $Z_s(\omega)$ représentent respectivement la pulsation et l'impédance de surface du conducteur. L'indice *tang* désigne la composante tangentielle des champs et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à la surface conductrice.

L'application des conditions aux limites de type SIBC consiste à remplacer une description volumique par un modèle surfacique. Le conducteur n'est plus maillé dans son épaisseur et la taille des cellules de discrétisation est donnée par la condition CFL (Courant, Friedrichs, Lewy) en espace libre. En pratique, cette approche est associée à plusieurs approximations. En premier lieu on considère que le matériau se comporte comme un bon conducteur sur l'ensemble de la gamme de fréquences de l'étude ($\sigma \gg \omega\epsilon$). Le comportement du matériau étant supposé inductif, l'équation précédente s'écrit alors :

$$\hat{\mathbf{E}}_{tang}(\omega; \mathbf{r}) = (R_s + j\omega L_s) \left[\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{H}}_{tang}(\omega; \mathbf{r}) \right] \quad (3.16)$$

Afin d'intégrer cette relation dans un algorithme temporel, l'équivalent temporel de la relation précédente est obtenu à l'aide d'une transformée de Fourier inverse et peut s'écrire pour $\mathbf{E}_x(t; \mathbf{r})$, par exemple, en supposant la direction de propagation suivant l'axe des z :

$$\mathbf{E}_x(t; \mathbf{r}) = R_s \mathbf{H}_y(t; \mathbf{r}) + L_s \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_y(t; \mathbf{r}) \quad (3.17)$$

La discrétisation numérique en FDTD de ce modèle SIBC introduit une troisième approximation liée au schéma Leap-Frog. Pour une cellule k donnée, le champ magnétique à l'instant $n\Delta t$ est approximé par :

$$H^n\left(k + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} \left[H^{n+\frac{1}{2}}\left(k + \frac{1}{2}\right) + H^{n-\frac{1}{2}}\left(k + \frac{1}{2}\right) \right] \quad (3.18)$$

Malgré ces approximations inhérentes à tout modèle numérique, les diverses expérimentations numériques montrent que cette méthode reste adaptée à la résolution d'un problème à une fréquence particulière [46]. Des modèles de SIBC dispersifs permettant l'utilisation d'une impédance de surface sur une large bande de fréquences ont été développés. Néanmoins, leur implémentation est plus complexe et la durée des calculs augmente singulièrement avec le traitement numérique des convolutions.

La Fig. 3.2 montre l'évolution temporelle de la composante suivant x du champ électrique en différents points d'observation. Nous observons, après un phénomène transitoire, une stabilisation de l'amplitude

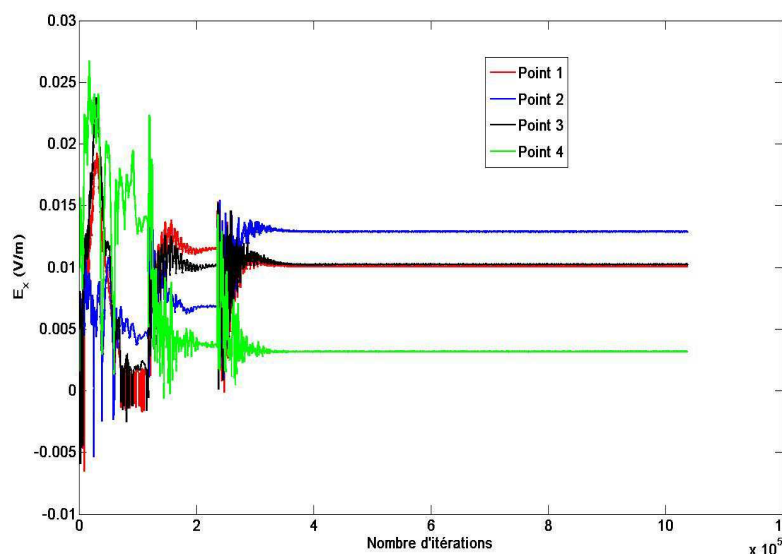


FIG. 3.2 – Stabilisation de la composante suivant x du champ électrique en différents points d'observation. Les données brutes ont été posttraitées afin de visualiser uniquement l'enveloppe des courbes

à l'intérieur de la CRBM. Suivant la composante de champ et le point spatial, le même phénomène stationnaire apparaît mais avec des amplitudes différentes.

Naturellement, la valeur de la conductivité influe sur la rapidité de convergence vers la solution. Ainsi, plus la valeur de la conductivité est forte, plus le matériau se rapproche d'un comportement de type conducteur «parfait», moins les pertes sont importantes et plus le temps d'établissement vers le régime stationnaire est long (Fig. 3.3, Fig.3.4 et Fig.3.5).

Si la discrétisation spatiale de la CRBM simulée n'est pas suffisante ($< \frac{\lambda}{30}$), un phénomène de convergences multiples apparaît, dû au caractère dispersif du schéma FDTD. Ces instabilités seront d'autant plus précoces que la valeur de la conductivité sera grande, rendant la convergence impossible. Ce problème peut devenir critique pour des valeurs de conductivité très élevées.

Méthode des pertes «simulées»

Dans ce deuxième formalisme, le principe consiste à faire une analogie entre la CRBM et un circuit oscillant RLC série, la CRBM étant une cavité qui emmagasine de l'énergie sous forme magnétique et sous forme électrique.

L'idée consiste alors à dimensionner une fenêtre rectangulaire temporelle $rect_{T_{max}}$ de durée T_{max} qui, appliquée au signal issu de la simulation de la CRBM dont les parois sont infiniment conductrices, traduirait la réponse de la CRBM réelle. Un filtre spécifique dont les caractéristiques font intervenir le circuit RLC est alors appliqué afin de prendre en compte les pertes de la CRBM réelle.

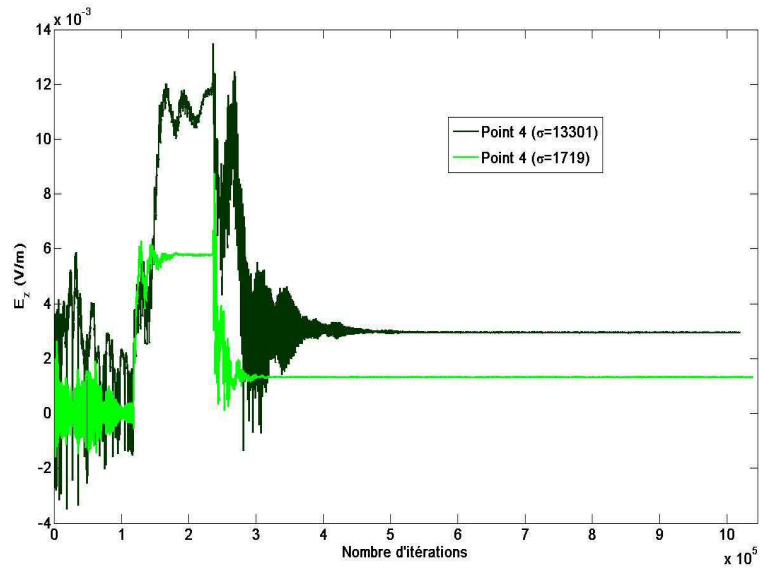


FIG. 3.3 – Stabilisation de la composante suivant Z du champ électrique en un point et pour différentes valeurs de la conductivité

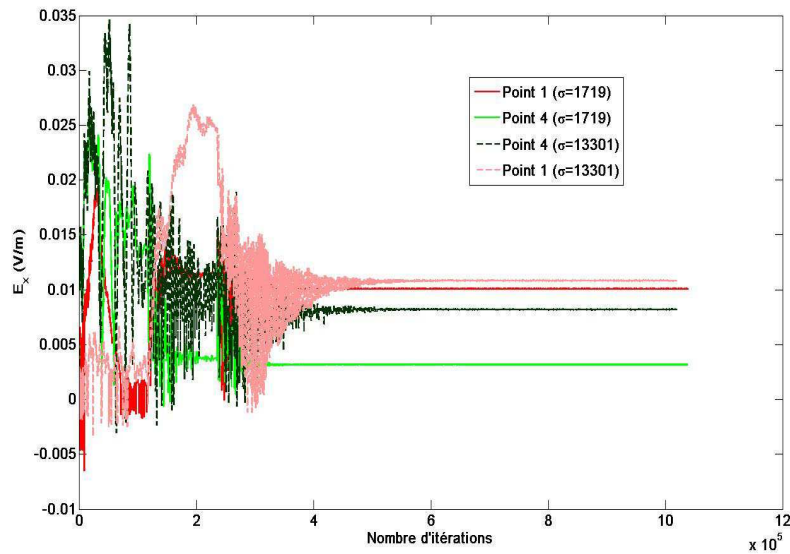


FIG. 3.4 – Stabilisation de la composante suivant X du champ électrique pour différents points et différentes valeurs de la conductivité

L'expression finale du champ électrique à la position \mathbf{r} et à l'instant t de la CRBM réelle est donnée par :

$$U(t; \mathbf{r}) = \text{rect}_{T_{max}} \cdot g_Q(t) \cdot U^{\sigma\infty}(t; \mathbf{r}) \quad (3.19)$$

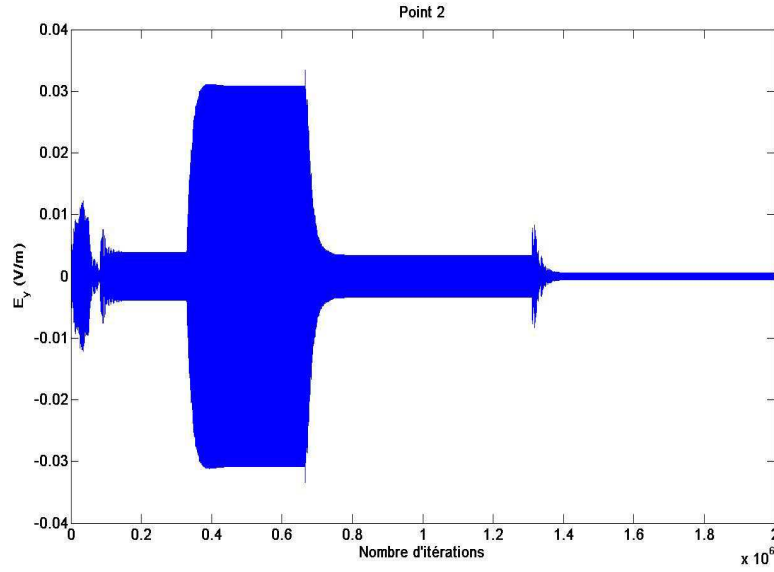


FIG. 3.5 – Allure temporelle d'une composante du champ à l'intérieur d'une cavité résonnante de conductivité $\sigma = 1719\text{S/m}$ simulée en utilisant un maillage «grossier»

avec :

$$g_Q(t) \cong \frac{\pi f_0}{Q} e^{-\frac{\pi f_0}{Q} t} \quad (3.20)$$

le filtre temporel, Q le coefficient de qualité de la CRBM à la fréquence f_0 et $U^{\sigma\infty}(t; r)$, le champ électrique obtenu en l'absence de pertes.

Pratiquement, la valeur du coefficient de qualité introduite dans les simulations est celle obtenue expérimentalement en un point du volume utile , d'où la nécessité de réaliser autant de mesures de Q que de points où une solution est recherchée.

De plus, l'adoption d'une estimée du facteur de qualité à intégrer suscite des questions car les choix sont multiples entre :

- la valeur moyenne du facteur de qualité sur une rotation de brasseur et sur l'ensemble des points de mesure,
- la valeur moyenne de la valeur maximale du facteur qualité sur une rotation de brasseur et sur l'ensemble des points de mesure,
- la valeur théorique du facteur de qualité [40, 41],
-

Ainsi, la méthode choisie permet une intégration directe des pertes de la CRBM dès la résolution des équations de Maxwell par une méthode FDTD complétée par des conditions aux limites de type SIBC. En ce qui concerne la valeur de la conductivité, celle-ci, issue de l'équation Eq.3.11, peut correspondre à :

- la valeur moyenne sur l'ensemble des positions du brasseur et des points de mesure,
- la valeur moyenne sur l'ensemble des positions du brasseur pris en un point de mesure donné,
- la valeur obtenue pour une position donnée du brasseur, en un point de mesure donné,

On en déduit donc la possibilité d'envisager différents types de modélisations déterministes, comme nous le verrons dans la suite du document. Une autre alternative est de développer un modèle original, fondé sur une analogie probabiliste entre le brasseur et la conductivité des parois, analogie consistant à considérer la conductivité comme une variable aléatoire dans les équations de Maxwell. La loi de probabilité de la conductivité est déterminée à l'aide du critère de stationnarité du champ aléatoire qui précise que la valeur moyenne du champ est identique quel que soit le point considéré dans le volume utile. En revanche, dans la méthode dite «des pertes simulées», le champ électrique dépend du point considéré et n'est donc pas stationnaire (Eq.3.19). De ce fait, l'analogie probabiliste proposée ne peut pas s'appliquer à ce formalisme d'intégration des pertes.

3.2 Définition d'un modèle probabiliste d'une Chambre Réverbérante à Brassage de Modes

3.2.1 Analogie probabiliste

La conductivité est un paramètre physique déterministe. Pour un test donné, le processus réverbérant en lui-même est déterministe : son évolution temporelle, à savoir l'essai CEM, est à la fois répétable et reproductible lorsque l'on conserve les conditions initiales d'un test à l'autre. En d'autres termes, lorsque l'évolution temporelle du champ électromagnétique exciteur, les positions du brasseur et celles de l'équipement sous test sont fixées, les résultats de mesures doivent être identiques (aux incertitudes de mesures près). C'est en fait au niveau «interne» d'un test que les données relatives aux différentes positions du brasseur apparaissent comme pseudo-aléatoires, chaque position de brasseur étant associée à un environnement électromagnétique propre, et l'ensemble des distributions spatiales du champ électromagnétique étant générées lors d'une rotation complète du brasseur. Idéalement, à savoir pour un nombre infini de positions du brasseur, une réalisation de l'expérience inclut un processus aléatoire ce qui justifie l'utilisation de méthodes statistiques. Cependant, en pratique, le nombre de positions de brasseur n'est pas infini d'où des conditions d'expérimentation ne correspondant pas à une situation idéale, et il devient ainsi indispensable de développer des modèles théoriques permettant de reproduire de la manière la plus réaliste possible le déroulement d'un test déterministe CEM. Partant ainsi du principe que, pour une fréquence donnée et à chaque pas de brasseur, les conditions aux limites de la CRBM sont modifiées, la principale hypothèse est que la conductivité diffère «virtuellement» d'une position à l'autre du brasseur. Ceci suggère que toutes les incertitudes i.e. tous les phénomènes physiques non maîtrisés dans la CRBM sont inclus dans ce paramètre. La précision des modèles probabilistes théoriques dépend bien entendu de celle des formules théoriques, et surtout des approximations et des erreurs numériques. Il a été fait état, dans quelques articles, de cette considération. Dans [42] par exemple, une approche probabiliste et des simulations de Monte-Carlo ont été utilisées pour déterminer le comportement d'une antenne dans une cavité avec un coefficient de qualité aléatoire. La comparaison avec les mesures en CRBM a donné des résultats encourageants pour une telle approche.

Il est à noter que le modèle probabiliste proposé ne vise pas à reproduire le comportement du champ à chaque pas de brasseur, mais à évaluer des estimées des paramètres du second ordre des grandeurs électromagnétiques par une méthode ne nécessitant pas une simulation lourde de la CRBM, en l'occurrence sans inclure le brasseur.

Le modèle probabiliste de la CRBM proposé dans ce chapitre s'appuie sur celui de la conductivité des parois de la CRBM. L'estimation du modèle aléatoire de ce paramètre est décrite dans le prochain paragraphe.

3.2.2 Loi de distribution de la conductivité des parois de la CRBM

Soit σ la conductivité des parois d'une CRBM à une fréquence donnée. Pour une position de brasseur donnée, elle est liée à la norme $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ du champ total par une relation de la forme :

$$\sigma = b_f \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^4 \quad (3.21)$$

où b_f est un coefficient > 0 donné par :

$$b_f = \frac{S^2 f}{8100\pi\mu_0 c^2 P_t^2} \quad (3.22)$$

avec S l'aire de la surface totale des parois métalliques de la CRBM. σ se réécrit alors :

$$\sigma = b_f s^4 \|\mathring{G}\|^4 \quad (3.23)$$

où s est l'écart-type des parties réelles et imaginaires du champ électrique et, $\mathring{G} = (\mathring{G}_1, \dots, \mathring{G}_6)$ une variable aléatoire gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^6 , i.e. $\mathring{G} \sim \mathcal{N}(0_6, I_{6 \times 6})$. σ suit alors une loi du χ_6^4 à facteur d'échelle $b_f s^4$ (cf. annexe B) et sa densité de probabilité, sa fonction de répartition, sa moyenne et son écart-type sont respectivement donnés par :

$$\begin{aligned} P_\sigma(u) &= \frac{\sqrt{u} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{b_f s^4}}}}{32(b_f s^4)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u) \\ F_\sigma(u) &= \left[1 - e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{b_f s^4}}} \left(1 + \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{b_f s^4}} + \frac{u}{8b_f s^4} \right) \right] \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u) \\ \ll \sigma \gg &= 48b_f s^4 \\ s_\sigma &= 24\sqrt{6}b_f s^4 \end{aligned} \quad (3.24)$$

La Fig.3.6 montre une bonne concordance entre la densité de probabilité expérimentale de la conductivité et la densité théorique à $690MHz$.

La loi de distribution de la conductivité des parois de la CRBM étant établie, l'étape suivante consiste à résoudre les équations de Maxwell pour chaque réalisation de ce paramètre et de déduire des résultats obtenus par l'ensemble des simulations, les estimées du champ électromagnétique.

L'approche la plus naturelle est l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo. Cependant, une telle procédure exige de considérer un nombre important d'échantillons pour assurer la convergence de la solution, d'où des temps de calculs considérables. C'est pourquoi nous proposons une nouvelle méthode de résolution des équations de Maxwell permettant d'intégrer les pertes de la chambre tout en optimisant le temps de simulation : la méthode de collocation stochastique.

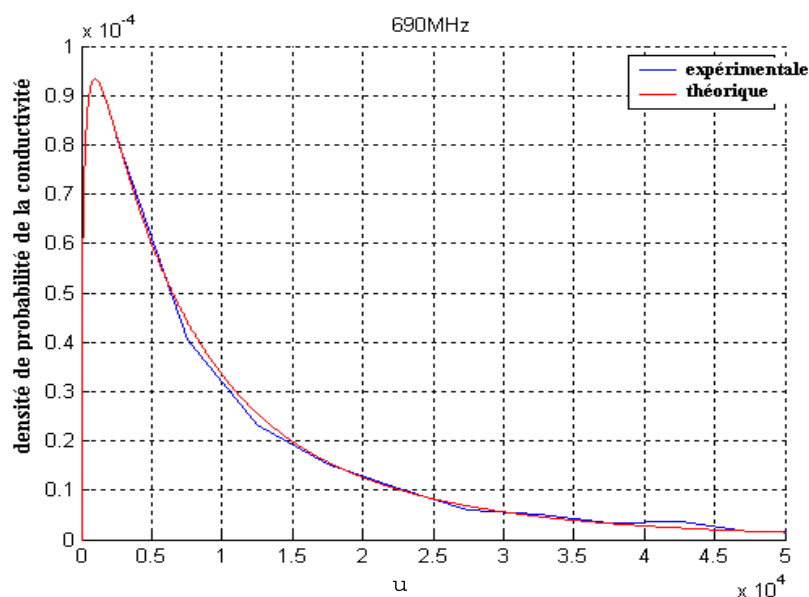


FIG. 3.6 – Densité de probabilité de la conductivité à 690 MHz

3.3 Résolution des équations de Maxwell par une méthode de collocation stochastique

3.3.1 La méthode de collocation déterministe

Les méthodes spectrales sont des méthodes d'ordre élevé pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Celles que nous utiliserons reposent sur un développement polynomial de la solution. Dans les méthodes spectrales, les fonctions de base sont des fonctions globales, définies sur tout le domaine et indéfiniment dérivables contrairement aux méthodes locales pour lesquelles le domaine est subdivisé en plusieurs intervalles, et les fonctions de base de calcul correspondent à des fonctions définies par morceaux sur ces intervalles. Le choix des fonctions test et des fonctions de base détermine les méthodes de Galerkin et de collocation.

Pour la méthode de Galerkin, les fonctions test sont identiques aux fonctions de base. Elles sont donc indéfiniment dérivables et satisfont toutes les conditions aux limites. En électromagnétisme par exemple, une approche appropriée pour le calcul numérique des équations non-linéaires semble être une méthode Galerkin discontinue. L'adjectif «discontinue» provient du fait que l'on tolère que le champ puisse être différent entre deux éléments (et donc discontinu à la frontière), l'adjectif «Galerkin» est lié au choix de fonctions de base de l'espace d'approximation des champs, identiques aux fonctions de test de l'espace d'approximation des équations.

Dans la méthode de collocation, les fonctions test sont des fonctions de Dirac translatées, centrées en certains points, appelés «points de collocation». Cette méthode est une classe particulière de la méthode des résidus pondérés. La méthode des résidus pondérés consiste à approcher partiellement l'annulation du résidu d'une équation différentielle pour trouver une solution discrète approximative. La méthode de collocation se distingue par sa facilité d'exécution, due au choix des fonctions de pondération. Celles-ci, des fonctions de Dirac, simplifient beaucoup les calculs.

En approchant numériquement une solution exacte, nous remplaçons une représentation infinie par une représentation finie. Une telle approximation signifie nécessairement que l'équation ne peut pas être satisfaite partout dans la région d'étude et que nous ne pouvons satisfaire qu'un nombre fini de conditions. C'est le choix des conditions à satisfaire qui définit le type de méthode numérique. Pour la méthode de collocation, l'équation différentielle n'est satisfaite qu'en quelques points distincts de la région d'étude.

Une fois les fonctions de pondération déterminées, la collocation par points requiert la résolution de trois problèmes :

- La position des points de collocation : le choix des points de collocation est d'une importance cruciale pour la précision de la méthode, il est important de noter que la dimension de l'espace d'approximation (i.e. le degré maximal des polynômes utilisés pour l'approximation de la solution) doit être égal à $(N + 1)$, N étant le nombre de points.
- Le choix des fonctions de base : il est déterminant pour la stabilité numérique de la méthode. Il existe une technique de projection sur des bases polynomiales. L'utilisation de bases polynomiales peut cependant se révéler inadaptée pour le traitement de certains problèmes, en particulier dans le cas de processus présentant une dépendance rapide ou discontinue vis-à-vis de un ou plusieurs paramètres incertains. Le choix de la base de projection s'avère alors important,
- Le nombre de points de collocation : il est difficilement prévisible et dépend plutôt de la convergence du problème.

On désigne donc sous le terme de collocation [50], les techniques d'estimation de variables déterministes ou aléatoires, par recherche du meilleur prédicteur linéaire, connaissant un certain nombre d'observations ponctuelles.

En guise d'illustration, considérons une méthode de collocation déterministe pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Cette résolution fait appel aux segmentations spatiale et temporelle de la solution. Dans le cas des méthodes classiques de résolution, l'objectif est d'approximer les équations aux dérivées partielles par des équations différentielles ordinaires. Ces équations peuvent être obtenues par des méthodes numériques bien connues telles que l'approche «différences finies» basée sur l'utilisation des séries de Taylor pour obtenir des approximations des dérivées partielles spatiales. Ces approximations peuvent être arrières, centrées ou avants selon la position des points utilisés pour réaliser l'approximation.

Soit, donc, l'équation différentielle linéaire :

$$IL(x) = 0 \quad (3.25)$$

avec, IL l'opérateur différentiel linéaire.

En utilisant une méthode de collocation, une approximation de la solution s'écrit sous la forme :

$$\bar{x}(t; r) = \sum_{i=0}^N c_i(t) \varsigma_i(r) \quad (3.26)$$

Dans cette équation, les $\varsigma_i(r)$ sont les fonctions de base prédéterminées alors que les $c_i(t)$ seront choisis

pour obtenir la meilleure approximation possible. Cette approximation $\bar{x}(t; r)$ est introduite dans les équations aux dérivées partielles originales afin de calculer les résidus R_Ω . Ces résidus seront utilisés comme mesure indirecte de l'erreur par rapport à la solution réelle du système. Le choix des $c_i(t)$ est donc fait en minimisant une pondération des résidus dans un espace fonctionnel déterminé par une base de fonctions ψ_i . Ce qui correspond au problème suivant :

$$\int_{\Omega} R_\Omega \psi_i d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

Le choix des fonctions de pondération ψ_i détermine le type de méthode des résidus pondérés qui est utilisée. Dans ce cas de collocation, des fonctions de Dirac sont employées. Cette approche permet de minimiser la valeur des résidus uniquement en certains points. Elle a l'avantage de simplifier les calculs car l'Eq.3.27 se ramène alors simplement à l'évaluation des résidus aux points de collocation. De plus, en utilisant des polynômes de Lagrange comme fonctions de base ς_i , il est possible de simplifier davantage le problème. En effet, ils possèdent la propriété suivante :

$$\varsigma_i(r = r_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pour } i = j \\ 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad (3.28)$$

Ainsi, si les racines de ces polynômes sont les points de collocation, la simplification suivante est possible :

$$\bar{x}(t; r_k) = \sum_{i=0}^N c_i(t) \varsigma_i(r_k) = c_k(t) \quad (3.29)$$

Ce qui permet d'obtenir l'approximation suivante des variables aux points de collocation :

$$\bar{x}(t; r_k) = \sum_{i=0}^N \bar{x}(t; r_k) \varsigma_i(r_k) \quad (3.30)$$

Aux points de collocation, il est donc maintenant possible d'approximer les dérivées partielles spatiales de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}(t; r_k)}{\partial r} &= \sum_{i=0}^N \frac{d\varsigma_i(r_k)}{dr} \bar{x}(t; r_k) \\ \frac{\partial^2 \bar{x}(t; r_k)}{\partial r^2} &= \sum_{i=0}^N \frac{d^2 \varsigma_i(r_k)}{dr^2} \bar{x}(t; r_k) \end{aligned} \quad (3.31)$$

La formulation du système d'équations différentielles ordinaires par collocation est donc formée de $N+1$ équations différentielles. Pour pouvoir utiliser cette approximation, $N+1$ points de collocation doivent être déterminés. Le choix de ces points est crucial pour obtenir une solution de bonne qualité.

Les paramètres relatifs au polynôme utilisé pour trouver les points de collocation doivent être choisis pour ajuster la méthode de collocation. Intuitivement, le nombre de points devrait être maximal pour obtenir une meilleure précision. Ce n'est pourtant pas le cas : un nombre de points trop important implique l'utilisation de polynômes de Lagrange de degré élevé ; ce qui peut causer rapidement des erreurs numériques lors de l'application.

Fonctions test	Méthode
$\psi_i(x) = \delta(x - x_i)$	Collocation
$\psi_i(x) = x_i$	Méthode des moments
$\psi_i(x) = \varsigma_i$	Galerkin

TAB. 3.1 – Fonctions test et méthodes associées

La nature de la méthode utilisée dépend donc des choix de la fonction test ou fonction poids ψ_i ainsi que de la fonction «expansion» ou fonction de base ς_i (Tab. 3.1) :

Pour la méthode de collocation, la fonction test est une impulsion de Dirac telle que $\psi_i(x) = \delta(x - x_i)$ où x_i est un point de collocation. R_Ω est telle que $R_\Omega(x_i) = 0$ au point de collocation x_i .

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons particulièrement à un autre type de méthode de collocation : la «méthode de collocation stochastique». Rappelons que notre objectif est l'estimation des paramètres statistiques du champ électromagnétique dans la CRBM en un nombre élevé de points appartenant au volume utile et pour des temps de calculs raisonnables. De ce fait, l'analogie probabiliste proposée entre le brasseur et la conductivité sera associée à une occupation de taille mémoire relativement peu élevée puisque seule la simulation de la cavité est nécessaire. L'approche la plus simple pour estimer ces différents paramètres est la méthode de Monte-Carlo qui consiste à résoudre les équations de Maxwell pour chaque échantillon de conductivité, et à réaliser ensuite les différents calculs relatifs aux estimées voulues. Ceci s'avère donc peu raisonnable en termes de temps de simulation. L'utilisation d'une méthode de collocation stochastique permet de retrouver les différentes estimées à partir d'un nombre N peu élevé de valeurs de la conductivité choisies à l'aide de la loi de probabilité de cette dernière. Nous obtenons alors $(N + 1)$ équations différentielles dont la solution est approchée par une méthode SIBC-FDTD. L'utilisation d'une telle méthode permet, dans ce cas, de remplacer une équation différentielle stochastique en $(N + 1)$ équations différentielles déterministes afin d'estimer les paramètres du second ordre du champ.

Les différentes étapes associées à ce type d'estimation seront directement présentées avec la résolution des équations de Maxwell contenant une conductivité aléatoire.

3.3.2 Application d'une méthode de collocation stochastique aux équations de Maxwell

En tout point d'un milieu homogène, isotrope, linéaire, les équations de Maxwell s'écrivent à chaque instant t :

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E} = 0 \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

où σ est la variable aléatoire définie précédemment qui suit une loi du χ_6^4 de paramètres donnés par l'Eq.3.24.

Les champs électrique et magnétique solutions dépendent de cette variable aléatoire. Ce sont donc des champs stochastiques, que nous noterons respectivement $\mathbf{E}(t; x, y, z; \sigma)$ et $\mathbf{H}(t; x, y, z; \sigma)$. Nous nous intéressons ici aux caractéristiques du second ordre du champ $\mathbf{E}(t; x, y, z; \sigma)$ et plus précisément de son dual spectral $\hat{\mathbf{E}}(f; x, y, z; \sigma)$. Pour calculer ces grandeurs, nous avons utilisé une méthode de collocation stochastique basée sur l'idée de remplacer les champs stochastiques $\mathbf{E}(t; x, y, z; \sigma)$ et $\mathbf{H}(t; x, y, z; \sigma)$ par des champs approximatifs, qui pour simplifier sont notés de façon identique. Ces champs sont de la forme

[48] :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(t; x, y, z; \sigma) = \sum_{i=0}^n \mathbf{E}^i(t; x, y, z) L_i(\sigma) \\ \mathbf{H}(t; x, y, z; \sigma) = \sum_{i=0}^n \mathbf{H}^i(t; x, y, z) L_i(\sigma) \end{cases} \quad (3.33)$$

avec n un entier ≥ 0 à choisir et, L_i , ($0 \leq i \leq n$), des polynômes de Lagrange d'ordre n , tels que :

$$L_i(u) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{u - \sigma_j}{\sigma_i - \sigma_j}, u \in \mathbb{R} \text{ avec } j \neq i \quad (3.34)$$

où les σ_j , $0 \leq j \leq n$ sont les points de collocation d'ordre n associés à la loi de probabilité de σ . Ces polynômes vérifient en outre l'importante propriété :

$$\forall (i, j) \in \{0, \dots, n\}, L_i(\sigma_j) = \delta_{ij} \quad (3.35)$$

où δ_{ij} est le symbole de Kroneker.

Les $n + 1$ points σ_j , ($0 \leq j \leq n$), sont déterminés à partir de la loi de σ et sont donc connus [48].

Les inconnues du problème sont ici les $n+1$ couples de fonctions déterministes $(\mathbf{E}^i(t; x, y, z), \mathbf{H}^i(t; x, y, z))$, ($0 \leq i \leq n$), que, pour simplifier, nous noterons $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ par la suite :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^i = \mathbf{E}^i(t; x, y, z) \\ \mathbf{H}^i = \mathbf{H}^i(t; x, y, z) \end{cases} \quad (3.36)$$

En portant l'Eq.3.33 dans l'Eq.3.32 et en tenant compte de l'Eq.3.36, il vient :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H}^i + \sigma \mathbf{E}^i \right) L_i(\sigma) = 0 \\ \sum_{i=0}^n \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}^i}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}^i \right) L_i(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

En écrivant ces équations aux points de collocation σ_j et en tenant compte de la propriété Eq.3.35 satisfaite par les polynômes L_i , on obtient :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n \left(\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H}^i + \sigma_j \mathbf{E}^i \right) \delta_{ij} = 0 \\ \sum_{i=0}^n \left(\mu \frac{\partial \mathbf{H}^i}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}^i \right) \delta_{ij} = 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

avec $0 \leq j \leq n$

soit :

$$\begin{cases} \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}^i}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H}^i + \sigma_i \mathbf{E}^i = 0 \\ \mu \frac{\partial \mathbf{H}^i}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E}^i = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

avec $0 \leq i \leq n$

On est ainsi conduit à la résolution de $n + 1$ problèmes différentiels déterministes, pour lesquels on

dispose de procédures numériques bien éprouvées. Pour résoudre ces problèmes, nous avons utilisé une méthode de type SIBC.

Une fois ces systèmes résolus, nous disposons des $n + 1$ couples solutions $(\mathbf{E}^i(t; x, y, z), \mathbf{H}^i(t; x, y, z))$, $0 \leq i \leq n$, qui ne sont connus, bien entendu, qu'aux noeuds de la grille spatio-temporelle utilisée par la résolution numérique. A partir de ces fonctions déterministes, nous pouvons alors par l'Eq.3.33, obtenir la solution stochastique approchée cherchée, puis, par transformation de Fourier de cette dernière, en déduire son dual spectral $(\hat{\mathbf{E}}(f; x, y, z; \sigma), \hat{\mathbf{H}}(f; x, y, z; \sigma))$ qui s'écrit :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{E}}(f; x, y, z; \sigma) = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{E}}^i(f; x, y, z) L_i(\sigma) \\ \hat{\mathbf{H}}(f; x, y, z; \sigma) = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{H}}^i(f; x, y, z) L_i(\sigma) \end{cases} \quad (3.40)$$

où les $\hat{\mathbf{E}}^i(f; x, y, z)$ et $\hat{\mathbf{H}}^i(f; x, y, z)$, $0 \leq i \leq n$, sont les transformées de Fourier des $\mathbf{E}^i(t; x, y, z)$ et $\mathbf{H}^i(t; x, y, z)$ respectivement ;

Notons que ces valeurs de champ ne peuvent être individuellement interprétées physiquement. Elles représentent des réalisations particulières du champ électromagnétique. Et, comme dans toute étude statistique, ces réalisations permettent d'estimer les différents paramètres du champ. Néanmoins, l'estimation des paramètres ne peut pas se faire avec la méthode classique de Monte-Carlo pour laquelle, par exemple, l'espérance mathématique est obtenue par la moyenne arithmétique des différentes réalisations. Des approximations numériques des caractéristiques du second ordre du champ électrique aléatoire peuvent alors être évaluées simplement à partir de la première relation de l'Eq.3.40, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

3.3.3 Approximation des caractéristiques statistiques du second ordre du champ électrique aléatoire

3.3.3.1 Approximation de la moyenne

Soit $\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma)$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, la p -ème coordonnée du champ aléatoire approximant $\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}; \sigma)$ défini par l'Eq.3.40. Sa moyenne s'écrit :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma) \gg = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; u) \mathbb{P}_{\sigma}(u) du \quad (3.41)$$

soit, d'après Eq.3.24 et Eq.3.40 :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma) \gg = \sum_{i=0}^n \hat{\mathbf{E}}_p^i(f; \mathbf{r}) I_i \quad (3.42)$$

avec :

$$I_i = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{(b_f s^4)}}}}{32(b_f s^4)^{\frac{3}{2}}} L_i(u) du \quad (3.43)$$

Cette intégrale est calculée par la méthode de Gauss-Laguerre qui donne :

$$I_i = \sum_{j=0}^m \psi_j L_i(\sigma_j) \quad (3.44)$$

avec :

$$u_j = \frac{\sigma_j^{1/2}}{2s^2 b_f^{1/2}} \quad (3.45)$$

$$\psi_j = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(m+3)u_j}{m!(m+1)^2 [\mathbf{L}_{m+1}^2(u_j)]^2}$$

où les $\sigma_j, 0 \leq j \leq n$, sont les points de collocation associés à la loi de σ , Γ est la fonction Gamma et \mathbf{L}_{m+1} est le polynôme de Laguerre d'ordre $m+1$.

Tenant compte de la propriété (Eq.3.35) des L_i , il vient $I_i = \psi_i$ et par suite, l'Eq.3.42 se réécrit :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma) \gg = \sum_{i=0}^n \psi_i \hat{\mathbf{E}}_p^i(f; \mathbf{r}) \quad (3.46)$$

3.3.3.2 Approximation de la variance

Soit $s_{\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma)}^2$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, la variance de la p -ème coordonnée $\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma)$ du champ approximant $\hat{\mathbf{E}}(f; \mathbf{r}; \sigma)$ défini par Eq.3.40. Elle est donnée par :

$$s_{\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma)}^2 = \ll (\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma))^2 \gg - (\ll \hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma) \gg)^2 \quad (3.47)$$

Calculons le moment d'ordre deux $\ll (\hat{\mathbf{E}}_p(\mathbf{r}; \dot{a}))^2 \gg$. Il est tel que :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_p^2(f; \mathbf{r}; \sigma) \gg = \int_{\mathbb{R}} \hat{\mathbf{E}}_p^2(f; \mathbf{r}; u) \mathbb{P}_{\sigma}(u) du \quad (3.48)$$

soit, d'après Eq.3.24 et Eq.3.28 :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_p^2(f; \mathbf{r}; \sigma) \gg = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \hat{\mathbf{E}}_p^i(f; \mathbf{r}) \hat{\mathbf{E}}_p^j(f; \mathbf{r}) I_{ij} \quad (3.49)$$

avec :

$$I_{ij} = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{u} e^{-\frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{(b_f s^4)}}}}{32(b_f s^4)^{\frac{3}{2}}} L_i(u) L_j(u) du \quad (3.50)$$

où, comme dans le cas précédent, cette intégrale est calculée par la méthode de quadrature de Gauss-Laguerre. On obtient tous calculs faits :

$$I_{ij} = \sum_{q=0}^m \psi_q \delta_{iq} \delta_{jq} \quad (3.51)$$

En portant ce résultat dans Eq.3.50 il vient :

$$\ll \hat{\mathbf{E}}_p^2(f; \mathbf{r}; \sigma) \gg = \sum_{i=0}^n \psi_i(\hat{\mathbf{E}}_p^i(f; \mathbf{r}))^2 \quad (3.52)$$

Soit en portant les Eq.3.46 et Eq.3.52 dans l'Eq.3.47 :

$$s_{\hat{\mathbf{E}}_p(f; \mathbf{r}; \sigma)}^2 = \sum_{i=0}^n \psi_i(\hat{\mathbf{E}}_p^i(f; \mathbf{r}))^2 - \left(\sum_{i=0}^n \psi_i(\hat{\mathbf{E}}_p^i(f; \mathbf{r})) \right)^2 \quad (3.53)$$

Comme on peut le voir, en chaque point, les approximations obtenues (Eq.3.44 et Eq.3.49), dépendent des points de collocation et des poids relatifs au polynôme de Laguerre utilisé. Le degré de ce polynôme i.e. le nombre de points de collocation nécessaire n'est pas connu d'emblée. Il dépend de la convergence de la solution.

Dans notre cas, les points de collocation dépendent du polynôme de Laguerre : une quadrature de Gauss-Laguerre étant utilisée. D'autres types de quadratures peuvent être utilisés, dépendant de la loi de probabilité de la variable aléatoire et du changement de variable. Dans ces cas, les points de collocation seront liés aux racines des polynômes utilisés.

En un point donné de l'espace, pour une fréquence donnée, les différentes étapes relatives à l'estimation des paramètres du champ sont les suivantes :

- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire intervenant dans les équations de Maxwell,
- définir ou calculer les points de collocation pour un nombre de points n fixé,
- résoudre les équations de Maxwell en chaque point de collocation par des méthodes classiques ; ceci revient à réaliser $(n + 1)$ simulations du champ électrique,
- utiliser les estimateurs des paramètres du champ électrique (Eq.3.44 et Eq.3.49).

Cette méthode sera appliquée à la CRBM pour l'estimation des paramètres statistiques du champ électrique. La validation se fera par comparaison avec les mesures expérimentales obtenues en 80 points du volume utile et pour 51 pas de brasseur.

3.4 Application de la méthode de collocation stochastique à l'analyse comportementale de la Chambre Réverbérante à Brassage de Modes

Dans certaines situations, où l'on désire comparer le taux de dispersion des distributions alors que leurs échelles de mesure respectives ne sont pas comparables, le coefficient de variation permet de fournir un indice quantitatif permettant cette comparaison. Le coefficient de variation d'une grandeur donnée est statistiquement défini comme étant le rapport de l'écart-type sur la moyenne. Aussi, n'ayant pas la possibilité de déterminer les grandeurs normalisées à la puissance transmise à la CRBM, cette information n'étant pas numériquement accessible, l'analyse sera effectuée à partir des coefficients de variation des

modules des coordonnées canoniques du champ électrique.

Les estimées expérimentales sont obtenues en considérant 51 réalisations du champ en chacun des 80 points du volume utile.

3.4.1 Détermination des points de collocation

Les points de collocation doivent être calculés pour chaque fréquence car ils dépendent du facteur d'échelle de la loi de la conductivité dont la valeur est fonction de la fréquence (Eq.3.43). Rappelons qu'en vertu de l'application du principe d'ergodicité, ces valeurs ont été obtenues à partir de mesures réalisées en 80 points du volume utile, pour 51 pas de brasseur, dans la gamme de fréquences $[250MHz - 1GHz]$ avec un pas de fréquence de $10MHz$. Rappelons que cette hypothèse est vérifiée, d'après les résultats des tests statistiques du Chap.1, à partir de $340MHz$. Cependant, nous présenterons les résultats de la présente étude aux fréquences plus faibles.

La Fig.3.7 présente la variation en fonction de la fréquence de la conductivité correspondant à 4 points de collocation.

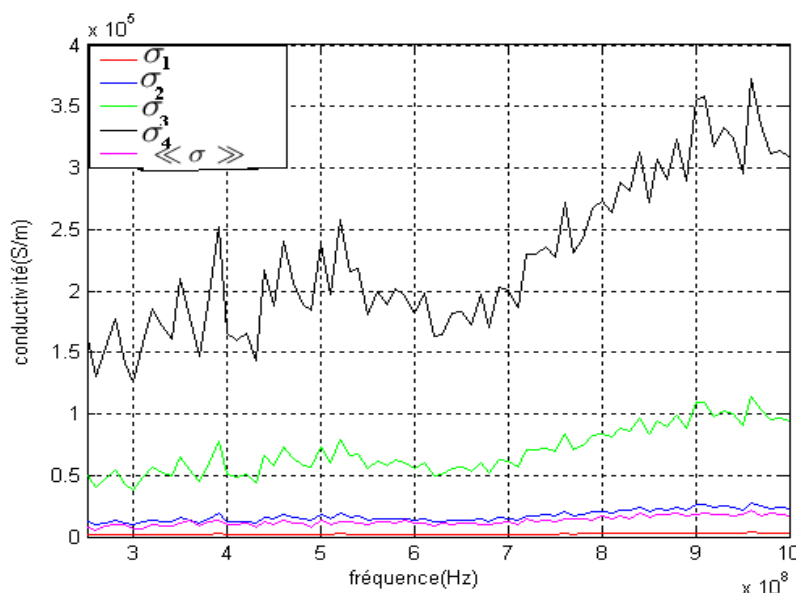


FIG. 3.7 – Valeurs des 4 points de collocation et de la conductivité moyenne en fonction de la fréquence

3.4.2 Résolution des équations de Maxwell-Modélisation de la cavité

La deuxième étape consiste à résoudre les équations de Maxwell pour chaque point de collocation. Rappelons que l'ensemble de la structure cavité/brasseur n'est pas modélisée ; les conditions aux limites du champ sont appliquées à la seule cavité. La modélisation est réalisée à partir d'une technique SIBC et s'applique à une cavité avec ou sans équipement sous test.

Cette méthode permet donc une occupation réduite de l'espace mémoire. En effet, bien qu'une seule simulation soit requise avec les méthodes récemment éprouvées, et ce, sur une large gamme de fréquences, celles-ci incluent une modélisation du brasseur, d'où des temps de simulation et une utilisation de l'espace mémoire plus importants. Il est à noter que la méthode présentée ici est applicable à des fréquences où la CRBM atteint son fonctionnement optimal, i.e. aux fréquences où les hypothèses de Hill ne sont pas rejetées.

3.4.3 Evolution du champ électrique en fonction des points de collocation

La Fig.3.8 représente la cartographie du champ dans le volume utile à $1GHz$ et pour différents points de collocation.

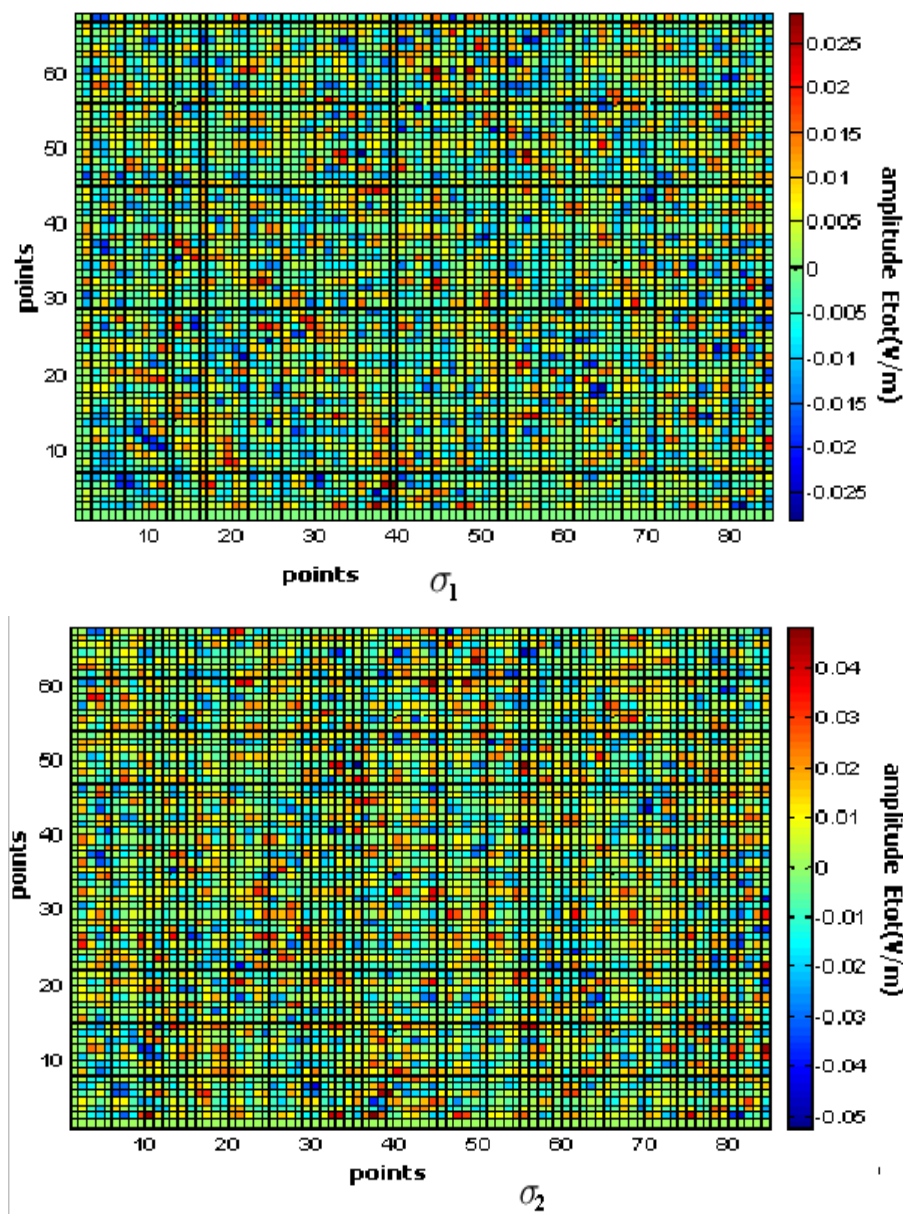


FIG. 3.8 – Amplitude du module du champ total à $1GHz$

Nous pouvons noter que la cartographie n'est pas modifiée pour deux points de collocation différents : seules les amplitudes du champ varient. La Fig.3.9 représente les valeurs du champ en fonction des points de collocation. Ces valeurs sont numériquement prélevées, à $620MHz$, en 80 points du volume utile dont les coordonnées cartésiennes coïncident avec celles des 80 points expérimentaux. Il est à noter qu'il peut exister une légère différence entre les coordonnées cartésiennes expérimentales et numériques d'un point

en raison du maillage de la cavité, le pas de discrétisation numérique variant en fonction de la fréquence.

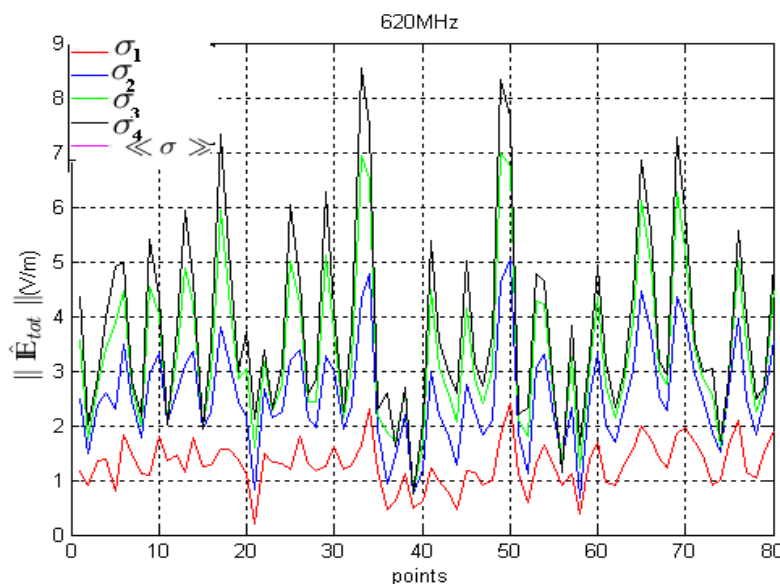


FIG. 3.9 – Réalisations du module du champ total à 620MHz pour différents points de collocation en différents points du volume utile

Les points de collocation à 620MHz donnés Fig.3.9 correspondent à $\sigma_1 = 1583S/m$, $\sigma_2 = 12255S/m$, $\sigma_3 = 50144S/m$, $\sigma_4 = 163338S/m$.

L'évolution du champ en fonction de σ s'explique par le fait que lorsque la conductivité augmente, le coefficient de qualité de la cavité augmente conformément à l'Eq.3.9, et la puissance dissipée dans les parois est plus faible. Par conséquent, le champ généré dans la cavité devient plus élevé.

3.4.4 Estimation de la moyenne et de l'écart-type

La première étape vers l'estimation des moyennes des coordonnées canoniques du champ consiste, dès lors, à multiplier chaque réalisation du champ par son poids ψ_i . Pour un nombre de points de collocation $n = 4$, les différents poids, qui sont indépendants de la fréquence, sont donnés dans le Tab. 3.2.

Conductivité	Poids
σ_1	0.36
σ_2	0.53
σ_3	0.10
σ_4	$2.18e - 3$

TAB. 3.2 – Poids des points de collocation pour $n = 4$

En prenant en compte les poids des points de collocation, nous pouvons remarquer sur la Fig.3.10 que l'analyse réalisée précédemment sur l'évolution du champ en fonction de la conductivité n'est plus vraie. En effet, plus le point considéré est proche de la moyenne de la conductivité, plus son poids est important.

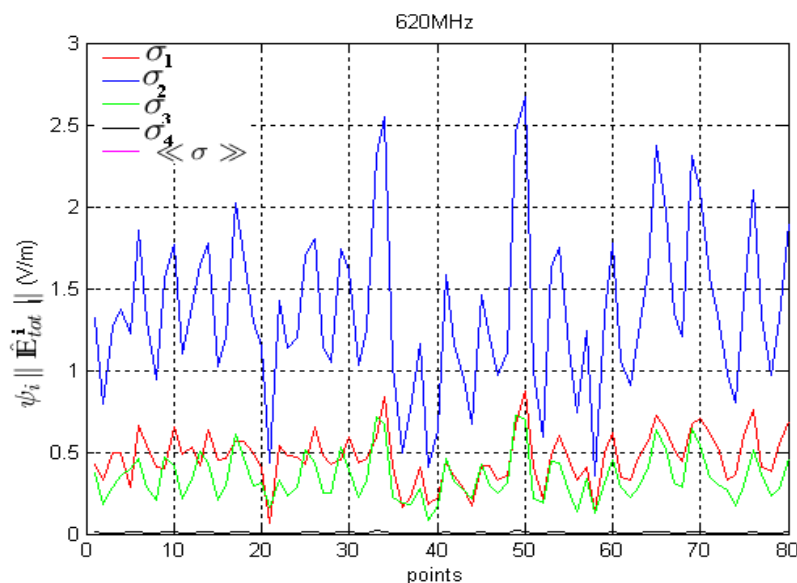


FIG. 3.10 – Prise en compte du poids de chaque point de collocation à 620 MHz

La moyenne est obtenue en chaque point après application de l'Eq.3.44 i.e à partir de la somme des quatre valeurs obtenues dans l'étape précédente. La variance est déterminée après application de l'Eq.3.49 en chaque point. La Fig.3.11 présente les résultats obtenus pour la moyenne et l'écart type du module du champ électrique, à la fréquence de 620 MHz.

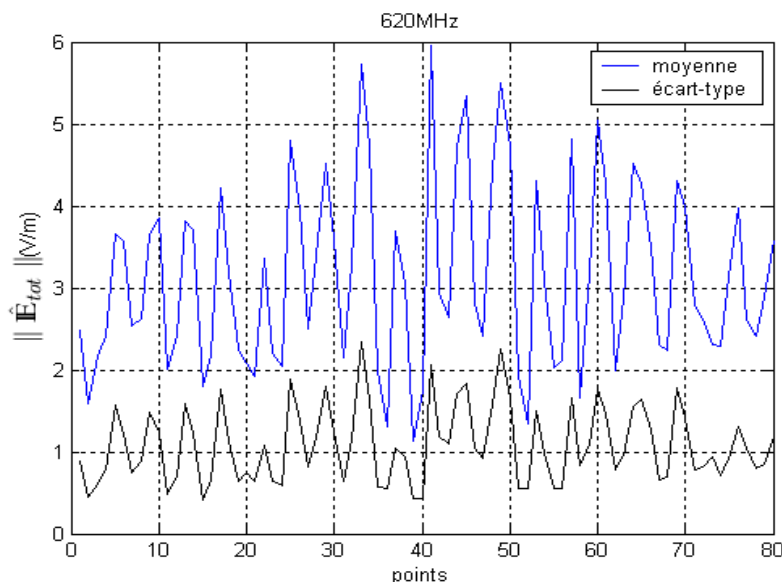


FIG. 3.11 – Moyenne et écart-type du module du champ à 620 MHz

Il est à noter que seuls, 4 points de collocation ont été utilisés pour les calculs : la convergence étant atteinte (Fig.3.12).

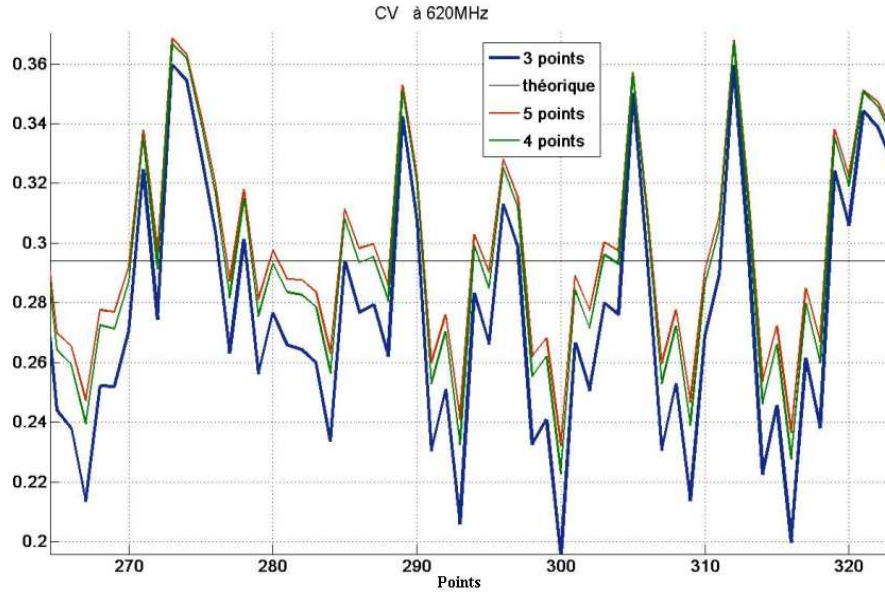


FIG. 3.12 – Coefficient de variation numérique du module du champ total en fonction du nombre de points de collocation

L'objectif est maintenant de valider le modèle probabiliste proposé en comparant les résultats qu'il fournit avec ceux issus des mesures expérimentales. Cette validation fait l'objet de la prochaine étape.

3.4.5 Valeurs expérimentale et théorique du coefficient de variation du champ électrique

La comparaison de ces résultats avec ceux obtenus expérimentalement se fera par le biais des coefficients de variation des modules du champ électrique. En effet, si les parties réelles et imaginaires du champ peuvent être obtenues numériquement, les modules des composantes du champ sont les seuls paramètres que nous fournit la mesure (effectuée au moyen d'une sonde triaxiale). De plus, de manière à disposer d'une référence plus théorique pour le coefficient de variation, nous considérerons le cas d'une CRBM idéale.

Si les composantes du champ électrique suivent une loi de Rayleigh d'ordre 2, leurs coefficients de variation théorique CVt sont donnés par :

$$CVt_{\|\hat{\mathbf{E}}_p\|} = \frac{s_{e\|\hat{\mathbf{E}}_p\|} \sqrt{2 - \frac{\pi}{2}}}{s_{m\|\hat{\mathbf{E}}_p\|} \sqrt{\frac{\pi}{2}}} \approx 0.5227 \quad (3.54)$$

puisque $s_{e\|\hat{\mathbf{E}}_p\|}$ et $s_{m\|\hat{\mathbf{E}}_p\|}$ doivent être idéalement égaux.

Quant au module du champ électrique total qui suit une loi de Rayleigh d'ordre 6 à facteur d'échelle, son coefficient de variation est théoriquement donné par :

$$CVt_{\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|} = \frac{s_{e\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|} \sqrt{6 - \frac{225\pi}{128}}}{s_{m\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|} \frac{15\sqrt{2\pi}}{16}} \approx 0.294 \quad (3.55)$$

Bien évidemment, le coefficient de variation du champ électrique en CRBM réelle est différent de celui

du champ généré dans une CRBM idéale et ce, en raison des différentes pertes liées à la structure et des incertitudes liées aux mesures. Ces pertes et incertitudes ont des répercussions sur le facteur d'échelle intervenant dans le coefficient de variation.

Comme illustré sur la Fig.3.13, ce décalage entre la valeur théorique du coefficient de variation et la valeur réelle se réduit aux fréquences où la CRBM atteint son fonctionnement optimal.

Une première comparaison est réalisée entre le coefficient de variation du module du champ total électrique déterminé à partir d'une méthode de Monte-Carlo, et celui obtenu à partir des données expérimentales (Fig.3.14).

La première simulation consiste à appliquer, en chaque point du volume utile, une méthode de Monte-Carlo à partir des 51 valeurs expérimentales locales de la conductivité mesurées au point considéré et correspondant aux 51 positions de brasseur.

Par ailleurs, puisque la valeur moyenne de la conductivité a été déterminée à partir de 4080 échantillons, une méthode de Monte-Carlo est appliquée à partir de ces 4080 échantillons obtenus en 80 points du volume utile.

L'écart entre les résultats obtenus pour le coefficient de variation par ces deux types de simulation reste cependant faible dans la gamme des fréquences étudiées, sauf peut-être en quelques points. L'allure de ces courbes est similaire à celle obtenue à partir des données expérimentales. Notons que la valeur du coefficient de variation peut varier très rapidement car une faible variation sur la moyenne ou sur l'écart-type du champ au point considéré a une conséquence directe sur cette valeur.

En outre, comme illustré sur la Fig.3.15, la comparaison avec le coefficient de variation issu de l'application de la méthode de collocation montre que les résultats donnés par cette approche se rapprochent des résultats expérimentaux lorsque la fréquence augmente.

Ceci peut s'expliquer par le fait que les lois de probabilités, donc les hypothèses de Hill considérées pour le calcul des points de collocation, sont vérifiées pour les plus hautes fréquences. De plus, la moyenne et l'écart-type de la conductivité utilisés pour le calcul des points de collocation, ont été déterminés à partir des mesures et par application du principe d'ergodicité. Ceci suppose que les paramètres des lois de probabilités soient identiques en tout point du volume utile, ce qui n'est pas rigoureusement le cas en pratique, la moyenne et l'écart-type du champ électrique n'étant pas rigoureusement constants dans le volume utile.

La différence entre les résultats obtenus par les méthodes de Monte-Carlo et de collocation peut, quant à elle, s'expliquer par le fait que la comparaison devrait être faite après convergence de la solution. Or, avec seulement 51 valeurs ou 4080 réalisations de la conductivité, la convergence de la moyenne n'est pas atteinte avec une méthode de Monte-Carlo.

Pour avoir une idée globale quantitative des différences entre les deux coefficients de variation (expérimental et collocation), les analyses sont maintenant effectuées à partir de l'intervalle de confiance de la valeur moyenne du coefficient de variation sur 80 points.

3.4.6 Intervalle de confiance du coefficient de variation du champ électrique

D'après le théorème central limite, quand la taille de l'échantillon à étudier est grande ($N > 30$), la distribution de la moyenne μ_{CV} tend vers une loi normale, quelle que soit la loi parente. De ce fait, si σ_{CV}^2 est l'estimateur non biaisé de sa variance, l'intervalle de confiance à $(1 - \alpha) \times 100\%$:

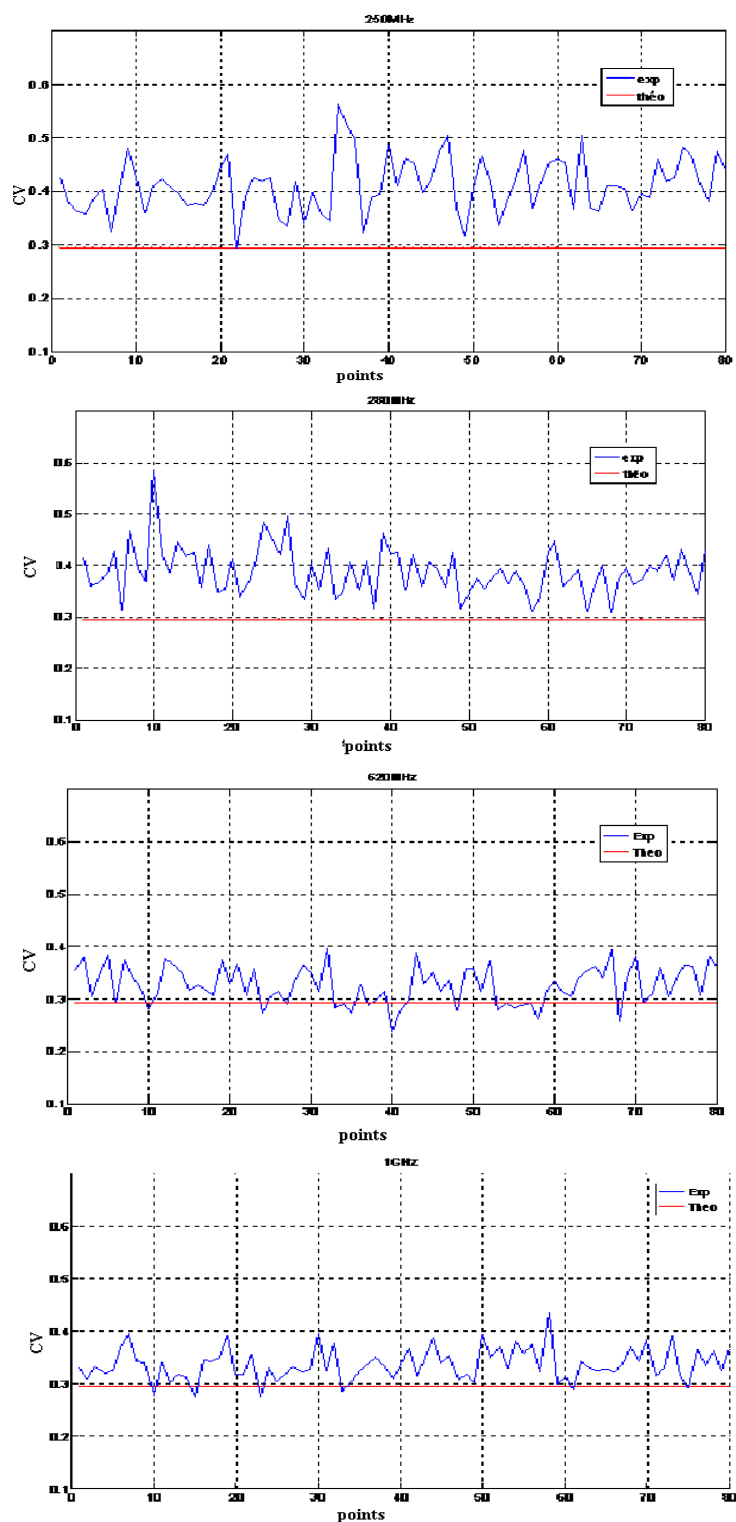


FIG. 3.13 – Comparaison entre le coefficient de variation théorique du module du champ total et celui calculé à partir des mesures expérimentales relevées en 80 points du volume utile pour 51 pas de brasseur

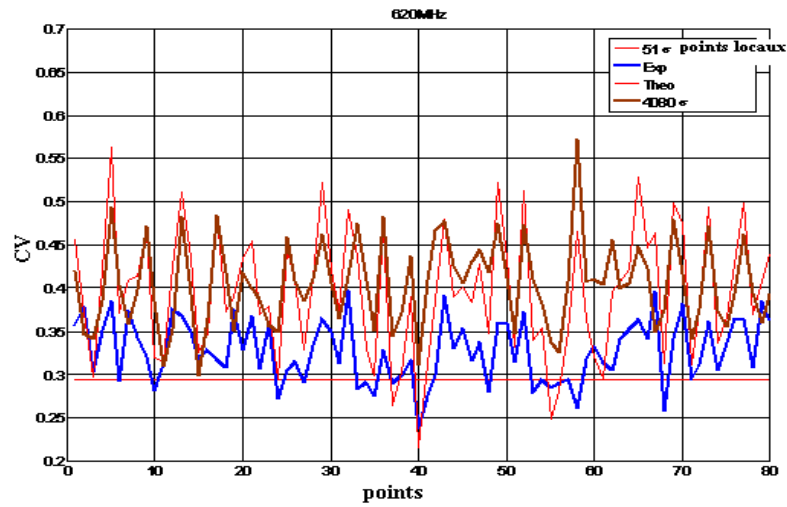


FIG. 3.14 – Coefficient de variation en 80 points du volume utile

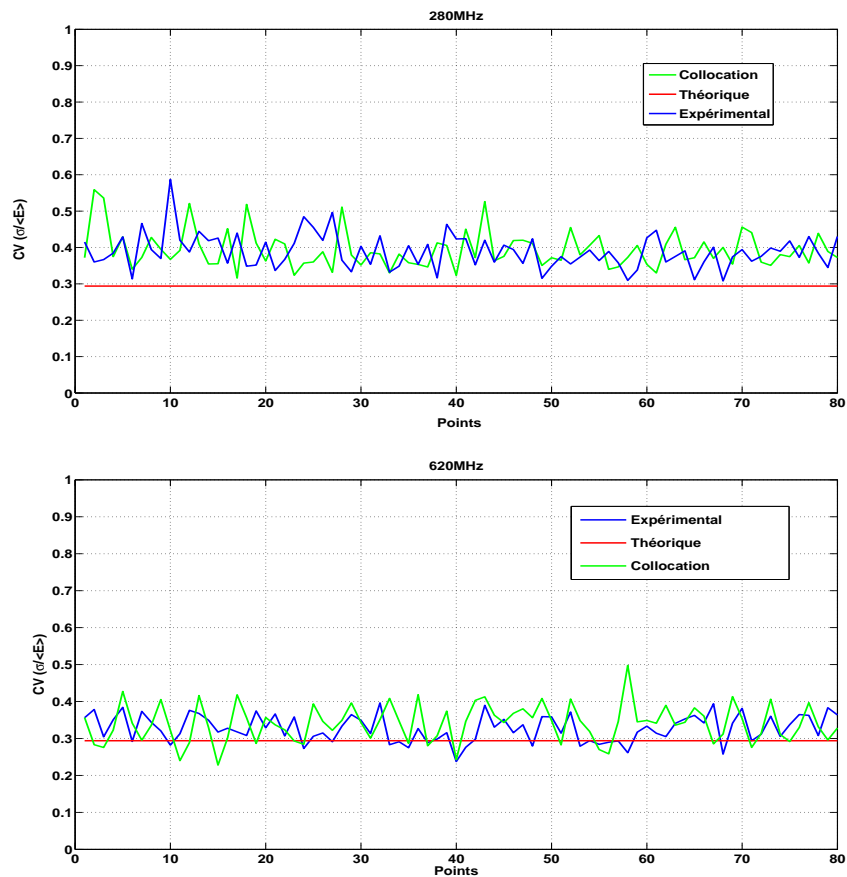


FIG. 3.15 – Comparaison entre le coefficient de variation expérimental du module du champ total et celui issu de la méthode de collocation en 80 points du volume utile (4 pts de collocation)

-de la moyenne est donné par :

$$\left\{ \mu_{CV} \pm F_{Norm} \frac{\sigma_{CV}}{\sqrt{N}} \right\} \quad (3.56)$$

avec $F_{Norm} = 1 - \frac{\alpha}{2}$ où F_{Norm} est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

-celui de la variance est :

$$\left\{ \frac{(N-1)\sigma_{CV}^2}{\chi_{N-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2}, \frac{(N-1)\sigma_{CV}^2}{\chi_{N-1, \frac{\alpha}{2}}^2} \right\} \quad (3.57)$$

$\chi_{N-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2$ et $\chi_{N-1, \frac{\alpha}{2}}^2$ sont données par la table de la loi χ^2 de Pearson. Ces deux quantités satisfont respectivement :

$$\begin{aligned} Prob(\chi_{N-1}^2 < \chi_{N-1, \frac{\alpha}{2}}^2) &= \frac{\alpha}{2} \\ Prob(\chi_{N-1}^2 < \chi_{N-1, 1-\frac{\alpha}{2}}^2) &= 1 - \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Si m_{CV} est la « vraie » moyenne du coefficient de variation, son intervalle de confiance est défini de telle sorte que :

$$Prob\left(\mu_{CV} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_{CV}}{\sqrt{N}} \leq m_{CV} \leq \mu_{CV} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma_{CV}}{\sqrt{N}}\right) = 1 - \alpha \quad (3.59)$$

En comparant, ainsi, les moyennes et écart-types du coefficient de variation des champs issus de l'expérimentation et de la simulation, nous obtenons :

-pour le champ total à 400MHz (Tab.3.3) :

400MHz	Expérimental (80 points)	Collocation (80 points)
μ_{CV}	0.3572	0.3185
I_{conf} à 90%	0.3510 – 0.3634	0.3124 – 0.3245
I_{conf} à 95%	0.3498 – 0.3646	0.3113 – 0.3257
I_{conf} à 99%	0.3475 – 0.3669	0.3090 – 0.3279
σ_{CV}	0.0336	0.0329
I_{conf} à 90%	0.02959 – 0.03843	0.02897 – 0.03763
I_{conf} à 95%	0.02892 – 0.0395	0.02832 – 0.03868
I_{conf} à 99%	0.02769 – 0.04175	0.02711 – 0.04088

TAB. 3.3 – Comparaison entre les estimées expérimentales et numériques du coefficient de variation à 400MHz

A 400MHz, les intervalles de confiance des moyennes expérimentale et numérique du CV ne se chevauchent pas même si ceux des écarts-types se croisent à partir d'un risque d'erreur de première espèce de 5%.

620MHz	Expérimental (80 points)	Collocation (80 points)
$\mu_C V$	0.3271	0.3405
I_{conf} à 90%	0.3205 – 0.3339	0.3312 – 0.3498
I_{conf} à 95%	0.3192 – 0.33517	0.3294 – 0.35156
I_{conf} à 99%	0.3167 – 0.33767	0.32596 – 0.35504
$\sigma_C V$	0.0364	0.0505
I_{conf} à 90%	0.03205 – 0.04163	0.0445 – 0.058
I_{conf} à 95%	0.03133 – 0.04279	0.04346 – 0.05937
I_{conf} à 99%	0.03 – 0.04523	0.04161 – 0.0627

TAB. 3.4 – Comparaison entre les estimées expérimentales et numériques du coefficient de variation à 620MHz

-pour le champ total à 620MHz (Tab.3.4) :

A 620MHz, les intervalles de confiance des moyennes expérimentale et numérique du coefficient de variation ont une partie commune quelle que soit la valeur de l'erreur de première espèce. Quant aux intervalles de confiance des écarts-types, ils se croisent lorsque l'erreur de première espèce est de 1%.

La tendance globale obtenue avec cette méthode est la même que celle obtenue avec la Fig.3.13. En effet, les intervalles de confiance ont une partie commune lorsque la fréquence augmente i.e. aux fréquences où la CRBM atteint son fonctionnement optimal et pour lesquelles les lois de probabilités coïncident avec les lois théoriques.

3.5 Application de la méthode de collocation à l'étude de l'émission d'un dipôle en CRBM

Les CRBM sont traditionnellement utilisées pour des mesures en susceptibilité des dispositifs électroniques. Il a été plus récemment montré que la CRBM permet également de mesurer l'efficacité de rayonnement ainsi que l'impédance d'entrée d'antennes filaires[42]. Cependant, l'étude du rayonnement de systèmes en CRBM reste encore assez peu exploré tant dans le domaine expérimental que numérique. En effet, les différents phénomènes de réflexion qui existent en CRBM ne permettent pas une dissociation aisée entre le champ émis par l'équipement sous test et celui provenant des divers phénomènes de recouplage avec les parois. De ce fait, les mesures se déroulent généralement en deux phases :

- une phase de calibrage consistant à mesurer la puissance moyenne $\ll P_{cal} \gg$ générée dans le volume utile au moyen d'une antenne de réception notée AR , ce pour un niveau contrôlé de la puissance transmise à la CRBM $\ll P_t \gg$,
- une seconde phase correspondant à la mesure de la puissance moyenne reçue $\ll P_{rec} \gg$ par AR , en présence du système rayonnant.

La puissance totale rayonnée par l'équipement sous test est alors donnée dans [29] par :

$$\ll P_{ray} \gg = \ll P_{rec} \gg \frac{\ll P_t \gg}{\ll P_{cal} \gg} \quad (3.60)$$

D'un point de vue simulation numérique, tenir compte de la rotation du brasseur dans la cavité pour

l'évaluation des caractéristiques d'une antenne placée dans le volume utile d'une CRBM, conduit à des temps de calculs prohibitifs.

C'est pourquoi nous proposons de nous affranchir de la modélisation de la CRBM (cavité et brasseur), cette structure étant caractérisée par son facteur de qualité. Nous considérerons pour cette étude l'exemple d'un dipôle de longueur $L = 25cm$ et de rayon $\iota = 0.5mm$, placé à la position :

$$\begin{cases} x = a/2 \\ y = b/4 \\ z \in [-L/2 + d/2, L/2 + d/2] \end{cases} \quad (3.61)$$

de la CRBM du LASMEA de dimensions $a = 8.40m$; $b = 6.70m$; $d = 3.50m$.

Notre approche fait intervenir trois étapes :

- L'utilisation d'une analogie probabiliste entre le brasseur de la CRBM et la conductivité et par conséquent, entre le brasseur et le coefficient de qualité ; cette analogie a pour but de s'affranchir de la simulation du brasseur,
- L'évaluation numérique du courant le long de l'antenne : cette étape correspond à la résolution de l'équation de Hallén où intervient le nombre d'onde caractérisant la propagation dans la cavité [51]. On peut ensuite envisager l'application d'une méthode de Monte-Carlo pour l'estimation de l'influence de la cavité sur les paramètres intrinsèques au dipôle tels que la résistance interne et la puissance d'alimentation.
- Cependant la méthode de Monte-Carlo s'avérant longue et coûteuse, l'application d'une méthode de collocation stochastique permet une évaluation plus rapide de l'influence de la cavité sur les divers paramètres.

3.5.1 Analogie probabiliste entre le brasseur et le coefficient de qualité

Dans le paragraphe précédent, nous avons assimilé la conductivité à une variable aléatoire en estimant qu'à chaque position de brasseur, correspond une valeur "virtuelle" de ce paramètre, la conductivité étant physiquement une variable déterministe. Le caractère aléatoire de la conductivité est "vrai" lorsque les conditions "idéales" de la CRBM sont observées. Considérer que la conductivité est une variable aléatoire revient aussi à assimiler le coefficient de qualité de la CRBM à un paramètre aléatoire d'après la relation suivante :

$$Q = \frac{3V}{2S} \sqrt{\frac{\pi\mu_0\sigma f}{\mu_r}} \quad (3.62)$$

Le coefficient de qualité Q est alors lié à la norme $\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ du champ électromagnétique par :

$$Q = a_f \|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|^2 \quad (3.63)$$

où a_f est un coefficient positif donné par :

$$a_f = \frac{Vf}{60cP_t} \quad (3.64)$$

avec V le volume de la CRBM, P_t la puissance transmise par l'antenne et c la vitesse de la lumière.

$\|\hat{\mathbf{E}}_{tot}\|$ suit une loi de Rayleigh généralisée d'ordre 6 à facteur d'échelle s , d'où l'expression de Q suivante :

$$Q = a_f s^2 \|\hat{\mathbf{G}}\|^2 \quad (3.65)$$

Il résulte alors de ceci et d'un résultat mathématique bien connu (cf. annexe F), que Q suit une loi du χ_6^2 à facteur d'échelle $a_f s^2$. Sa densité de probabilité, sa fonction de répartition, sa moyenne et son écart-type sont donc donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} P_Q(u) &= \frac{u^2 e^{-\frac{u}{2a_f s^2}}}{16a_f^3 s^5} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u) \\ F_Q(u) &= \left[1 - e^{-\frac{u}{2a_f s^2}} \left(1 + \frac{u}{2a_f s^2} + \frac{u^2}{8a_f^2 s^4} \right) \right] \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(u) \\ \ll Q \gg &= 6a_f s^2 \\ s_Q &= 2\sqrt{3}a_f s^2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

La comparaison entre la densité de probabilité théorique et l'estimée expérimentale du coefficient de qualité valide ce modèle dans la zone fréquentielle où la CRBM atteint son fonctionnement optimal. La Fig.3.16 illustre cette comparaison à $250MHz$ et $690MHz$. L'estimation de la densité de probabilité expérimentale est réalisée à partir des échantillons prélevés aux points de mesures déterminés suivant le protocole énoncé au paragraphe {1.2.3.3}.

Ce modèle étant validé, nous supposons donc maintenant la CRBM modélisée par son seul coefficient de qualité.

De plus, Gronwald propose dans [51], une méthode fondée sur la résolution numérique de l'équation de Hallén pour l'évaluation du courant le long d'un dipôle placé dans une cavité. En effet, cette approche est basée sur l'introduction d'un nombre d'onde caractérisant les phénomènes de propagation dans la cavité.

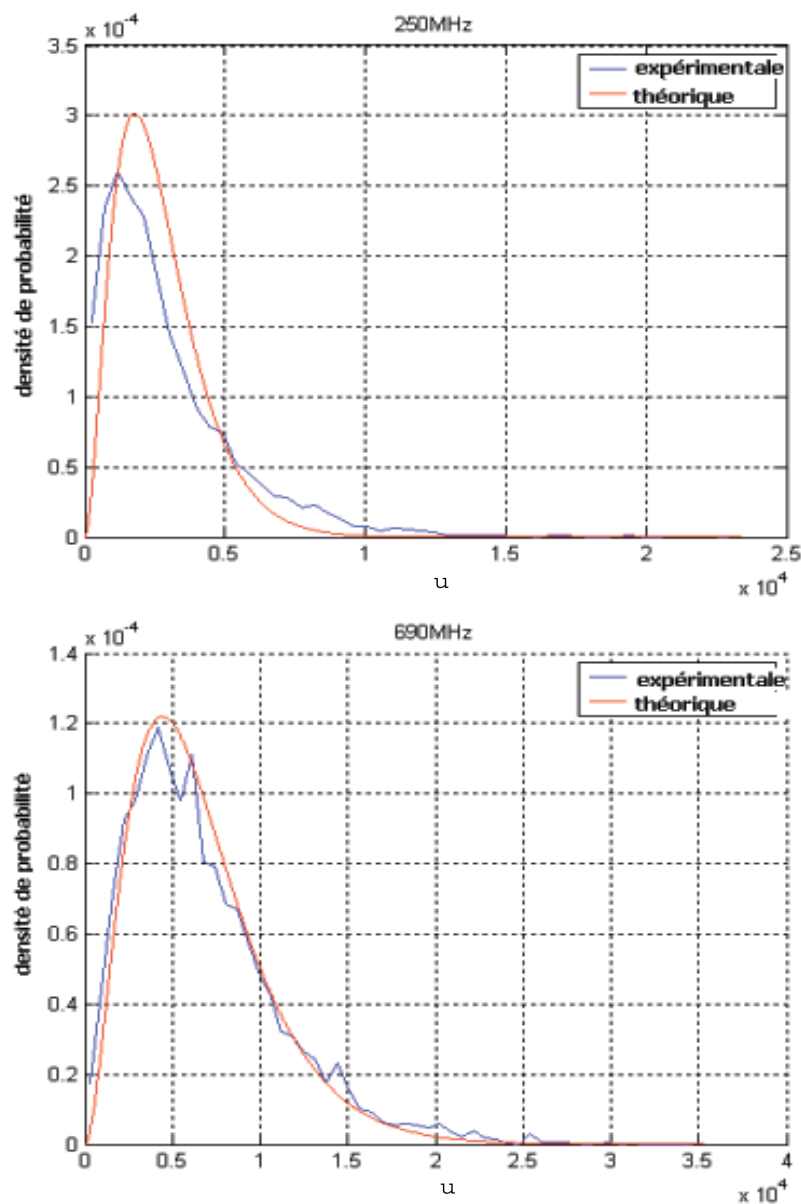


FIG. 3.16 – Densité de probabilité du coefficient de qualité à 250 MHz et 690 MHz

3.5.2 Estimation du courant par une méthode des moments basée sur la fonction de Green des cavités

Considérons le dipôle, précédemment décrit, situé dans une cavité rectangulaire. La distribution du courant le long du dipôle est donné par l'équation intégrale de Hallén :

$$\int_{-L/2}^{L/2} G^A(z, z') I(z') dz' = -\frac{j}{\eta} \left(A \cos(kz) + \frac{V_0}{2} \sin(k|z|) \right) \quad (3.67)$$

avec :

$-\eta = \frac{\mu}{\epsilon}$ l'impédance du milieu,

- $I(\mathbf{z}')$ la distribution du courant le long du dipôle,
- A une constante,
- k le nombre d'onde,
- $G^A(\mathbf{z}, \mathbf{z}')$ la fonction de Green de la cavité

3.5.2.1 Décomposition de la fonction de Green des cavités

La fonction de Green en espace libre est donnée par :

$$G_{EL}^A(\mathbf{z}, \mathbf{z}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk\sqrt{\iota^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2}}}{\iota^2 + (\mathbf{z} - \mathbf{z}')^2} \quad (3.68)$$

lorsque le rayon $\iota \ll \lambda$.

En revanche, dans une cavité, l'utilisation d'une fonction de Green fonction du nombre d'onde caractérisant les phénomènes de résonance dans la structure, permet de s'affranchir de la modélisation de la cavité. En effet, le modèle Q de la cavité est introduit dans le nombre d'onde complexe k suivant la relation :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[1 - \frac{j}{2Q} \right] \quad (3.69)$$

Plusieurs représentations de cette fonction de Green sont parues dans la littérature [52, 53, 54]. Cependant, d'un point de vue numérique, il est important d'utiliser une représentation sans singularité i.e. efficace tant au niveau de la zone source qu'au niveau de la résonance.

Pour cela, la fonction de Green d'une cavité rectangulaire peut être calculée en utilisant une technique de sommation d'images et de modes, chacune d'elles correspondant à un mode excité. Ces méthodes présentent toutefois l'inconvénient de converger lentement en particulier pour des cavités de dimensions élevées telles que la CRBM du LASMEA. Une méthode de calcul rapide de la fonction de Green a ainsi été introduite par Ewald en 1921 [55, 56, 58, 60] : la composante est constituée de deux termes G_{z1}^A et G_{z2}^A tels que :

$$G_z^A = G_{z1}^A + G_{z2}^A \quad (3.70)$$

avec :

- un terme G_{z1}^A défini comme suit :

$$G_{z1}^A = \frac{\mu}{8abc} \sum_{m,n,p=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^7 A_i^z \frac{e^{-\frac{k_0^2 - k^2}{4E^2}}}{k_0^2 - k^2} e^{j(k_x X_i + k_y Y_i + k_z Z_i)} \quad (3.71)$$

- un terme G_{z2}^A donné par :

$$G_{z2}^A = \frac{\mu}{8\pi} \sum_{m,n,p=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=0}^7 A_i^z \left[\frac{e^{jkR_{i,mnp}} \operatorname{erfc}\left(R_{i,mnp}E + \frac{jk}{2E}\right)}{R_{i,mnp}} + \frac{e^{-jkR_{i,mnp}} \operatorname{erfc}\left(R_{i,mnp}E - \frac{jk}{2E}\right)}{R_{i,mnp}} \right] \quad (3.72)$$

avec :

$$A_i^z = \begin{cases} +1, i = 0, 1, 6, 7 \\ -1, i = 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

$$R_{i,mnp} = \sqrt{(X_i + 2ma)^2 + (Y_i + 2nb)^2 + (Z_i + 2pc)^2}$$

$$X_i = \begin{cases} x - x', i = 0, 1, 2, 3 \\ x + x', i = 4, 5, 6, 7 \end{cases}$$

$$Y_i = \begin{cases} y - y', i = 0, 1, 4, 5 \\ y + y', i = 2, 3, 6, 7 \end{cases}$$

$$Z_i = \begin{cases} z - z', i = 0, 2, 4, 6 \\ z + z', i = 1, 3, 5, 7 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\pi/a \\ n\pi/b \\ p\pi/c \end{pmatrix}$$

$erfc$ représente la fonction d'erreur complémentaire donnée dans [57].

G_{z1}^A converge rapidement près d'une zone de résonance tandis que G_{z2}^A possède cette particularité près de la zone source.

E est appelé le "splitting parameter" et son choix est prépondérant dans la convergence de la fonction de Green comme nous le verrons dans le prochain paragraphe.

3.5.2.2 Choix du "splitting parameter"

Le paramètre E appelé "splitting parameter" sert à ajuster les contributions de G_{z1}^A et de G_{z2}^A . L'augmentation de la valeur de E permet une contribution plus importante de G_{z1}^A et fait ainsi décroître l'influence de G_{z2}^A dans la somme. Réciproquement, lorsque E diminue, la contribution de G_{z2}^A est plus importante. D'un point de vue numérique, il est important de choisir E de telle sorte que les deux termes G_{z1}^A et G_{z2}^A convergent rapidement avec un nombre peu élevé de termes m, n, p . La valeur :

$$E_{opt} = \left(\pi^2 \frac{1/a^2 + 1/b^2 + 1/d^2}{a^2 + b^2 + d^2} \right)^{1/4} \quad (3.73)$$

est habituellement utilisée, cependant elle devient très faible pour les cavités de grandes dimensions comme celle de la taille de la CRBM du LASMEA.

D'après les résultats de [56], une valeur approchée de E peut être donnée par :

$$E = \max \left(E_{opt}, -\frac{\alpha_{000}}{x_1}, \frac{k}{2x_2} \right) \quad (3.74)$$

avec :

$$x_j = \sqrt{\ln(c_j) + \ln\left(\sqrt{c_j + \ln\left(\sqrt{c_j + \ln\left(\sqrt{\ln(c_j)}\right)}\right)}\right)}, j = \{1, 2\}$$

$$\begin{cases} c_1 = \text{Real}\left(10\left(\frac{\alpha_{000}^2 abd}{\pi R_{000}}\right)\right), \\ c_2 = 10\sqrt{\pi}, \\ \alpha_{mnp}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2 - \frac{k^2}{2}, \\ R_{000} = \max(R_{i,000}), i = (0, \dots, 7) \end{cases}$$

Avec une telle approximation, $G_{z_2}^A$ converge, dans notre étude, pour m, n, p variant de -3 à 3 ; ce qui donne un total de 7 termes, tandis que le nombre de termes nécessaires pour la convergence de $G_{z_1}^A$ varie en fonction de la fréquence (Fig.3.17).

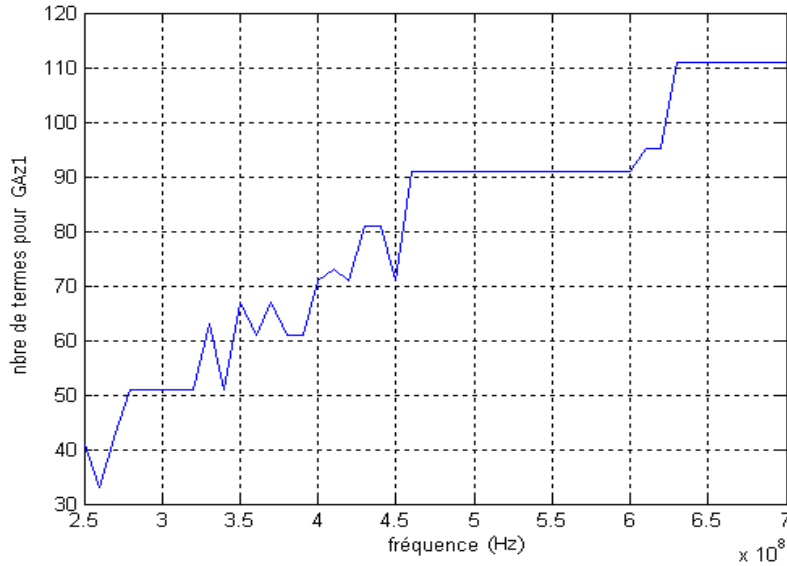


FIG. 3.17 – Nombre de termes nécessaires à la convergence de $G_{z_1}^A$ avec une cavité de la taille de la CRBM

Nous aurions pu faire le choix de diminuer la valeur de " E " et ainsi, de diminuer le nombre de termes nécessaires à la convergence de $G_{z_1}^A$. Ceci aurait eu pour conséquence l'augmentation du nombre de termes nécessaires à la convergence de $G_{z_2}^A$. Cependant, l'évaluation numérique $G_{z_1}^A$ étant plus rapide, nous resterons sur ce choix permettant ainsi à G_z^A de converger plus rapidement (Fig.3.18).

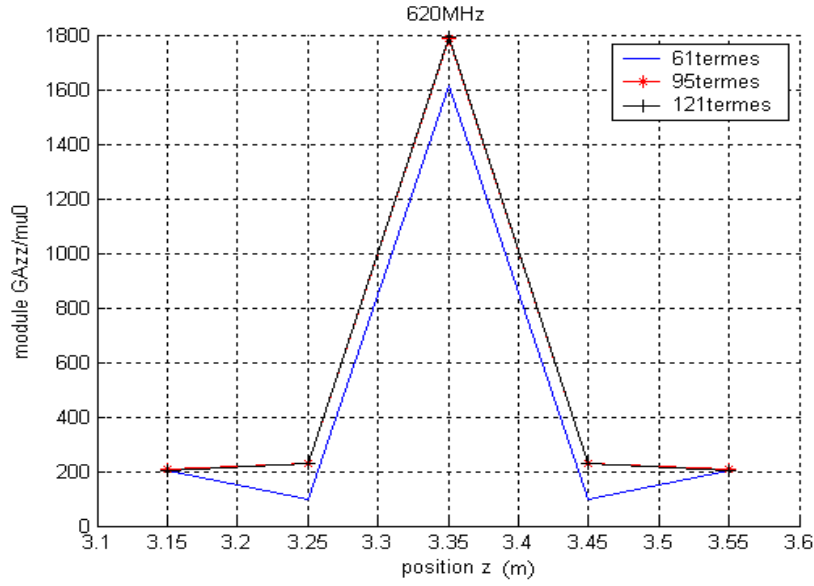


FIG. 3.18 – Convergence de la fonction de Green

3.5.2.3 Evaluation du courant par une méthode des moments

Le courant $I(z')$ et la constante A présentes dans l'équation intégrale de Hallén Eq. 3.67, sont évalués par une méthode des moments [59, 61, 62].

La méthode choisie est la méthode Point-Segment pour laquelle les fonctions base et test correspondent, respectivement, à des fonctions "porte" et des implusions de Dirac. En effet, l'objectif est d'appliquer l'approche validée dans [51] au modèle probabiliste proposé.

Après projection sur la base choisie, le courant est donné par :

$$I_u(z) \approx \sum_{u=1}^M \alpha_u P_u(z) \quad (3.75)$$

En introduisant cette expression dans l'équation intégrale 3.67 et les conditions limites sur les derniers segments de l'antenne ($\alpha_1 = \alpha_M = 0$), il apparaît que :

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^M A_{pu} a_u &= b_p \\ a_u &= (\alpha_2, \dots, \alpha_{M-1}, A)_u \\ b_p &= -\frac{jV_0}{2\eta} \sin(k|z_p|) \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$A_{pM} = \frac{j}{\eta} \cos(kz_p)$$

$$A_{pu} = \int_{z_u-h/2}^{z_u+h/2} G_z^A(z_p, z') dz', u = 1, \dots, M-1$$

La distribution du courant le long du dipôle est alors, pour chaque fréquence, fonction du facteur de qualité de la cavité.

3.5.3 Influence de la cavité sur la distribution du courant le long du dipôle

Pour différentes valeurs de Q , nous remarquons que seule la partie réelle du courant varie tandis que sa partie imaginaire qui prédomine, reste constante (Fig.3.19 et Fig.3.20). Par conséquent, la valeur absolue du courant reste indépendante de la valeur du coefficient de qualité.

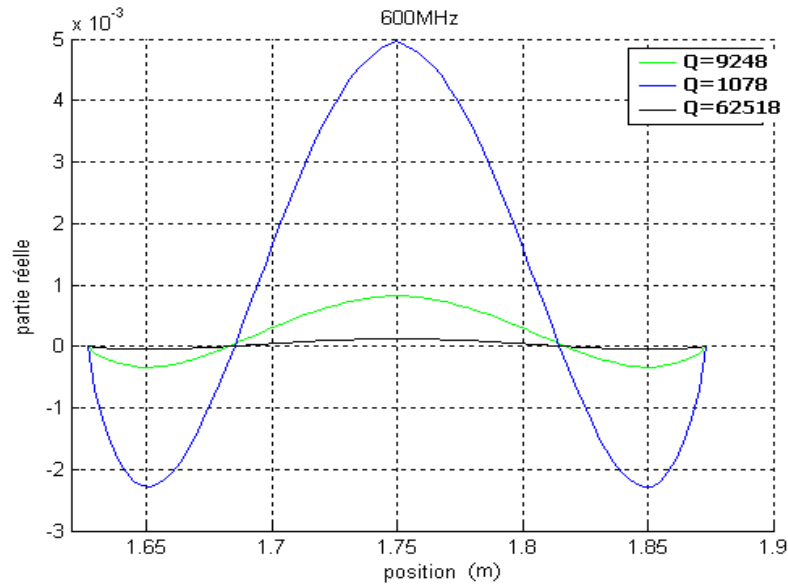


FIG. 3.19 – Partie réelle du courant à 600 MHz pour différentes valeurs de Q

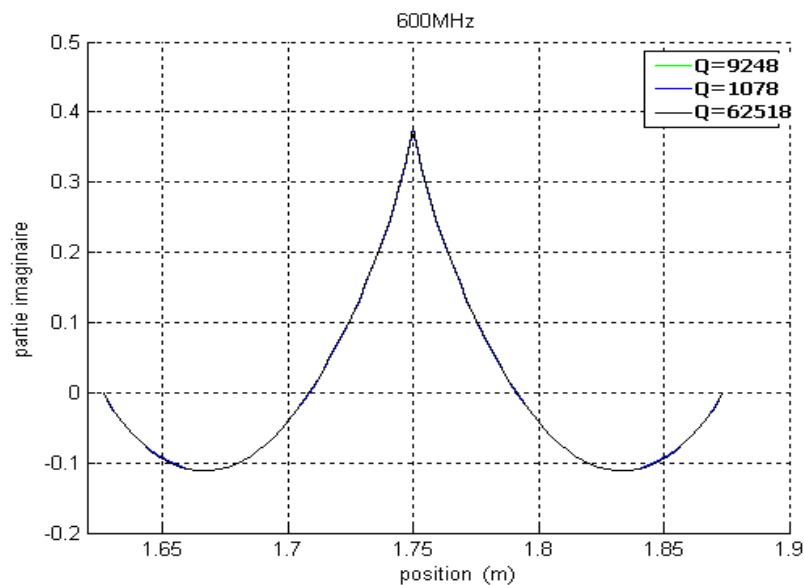


FIG. 3.20 – Partie imaginaire du courant à 600 MHz pour différentes valeurs de Q

Sur la Fig.3.21 est représentée la distribution du courant à $600MHz$ en considérant :

-d'une part : un calcul avec le coefficient de qualité moyen $Q_{moy} = \ll Q \gg$ obtenu à partir des 4080 échantillons expérimentaux

-d'autre part : le courant moyen obtenu par une méthode de Monte-Carlo à partir des 51 valeurs de Q simulées selon la loi de probabilité établie au chapitre 3.5.1.

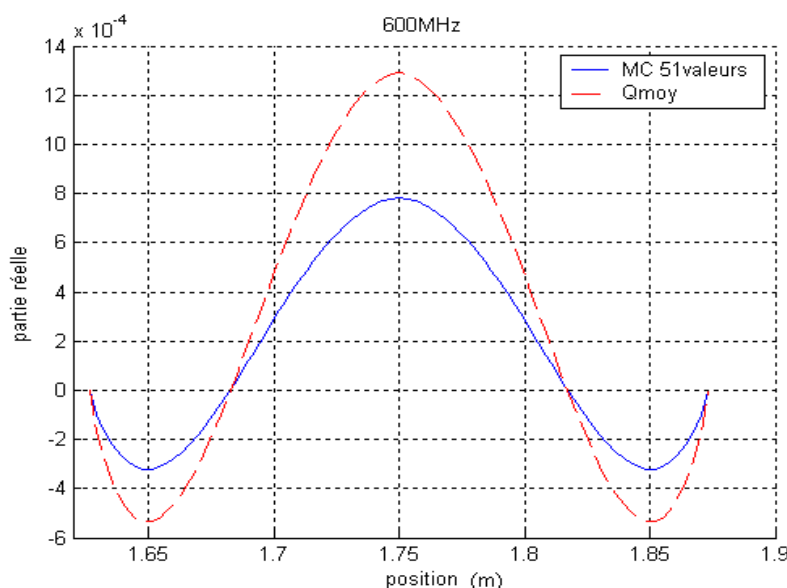


FIG. 3.21 – *Partie réelle du courant le long du dipôle par une méthode de Monte-Carlo (51 valeurs de Q) et pour $Q = Q_{moy}$*

Là encore, nous observons une différence entre les parties réelles de $\ll I(Q) \gg$ et de $I(\ll Q \gg) = I(Q_{moy})$.

L'influence de la CRBM sur la résistance interne ainsi que sur la puissance d'alimentation de l'antenne fera l'objet du paragraphe suivant.

3.5.4 Influence de la cavité sur la résistance interne du dipôle et la puissance d'alimentation

La résistance d'entrée de l'antenne et sa puissance d'alimentation sont respectivement données par :

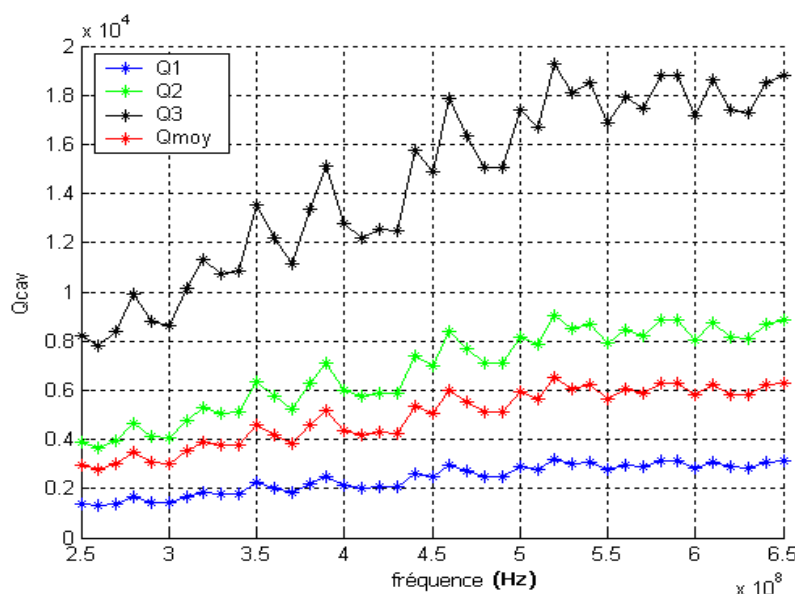
$$\begin{aligned} R_{in} &= \text{real}\left(\frac{V_0}{I_0}\right) \\ P_{alim} &= \frac{R_{in}}{2} |I_0|^2 \end{aligned} \quad (3.77)$$

avec :

- $V_0 = 500V$, la valeur de la tension d'alimentation imposée, au centre de l'antenne et

- I_0 , la valeur du courant au centre du dipôle.

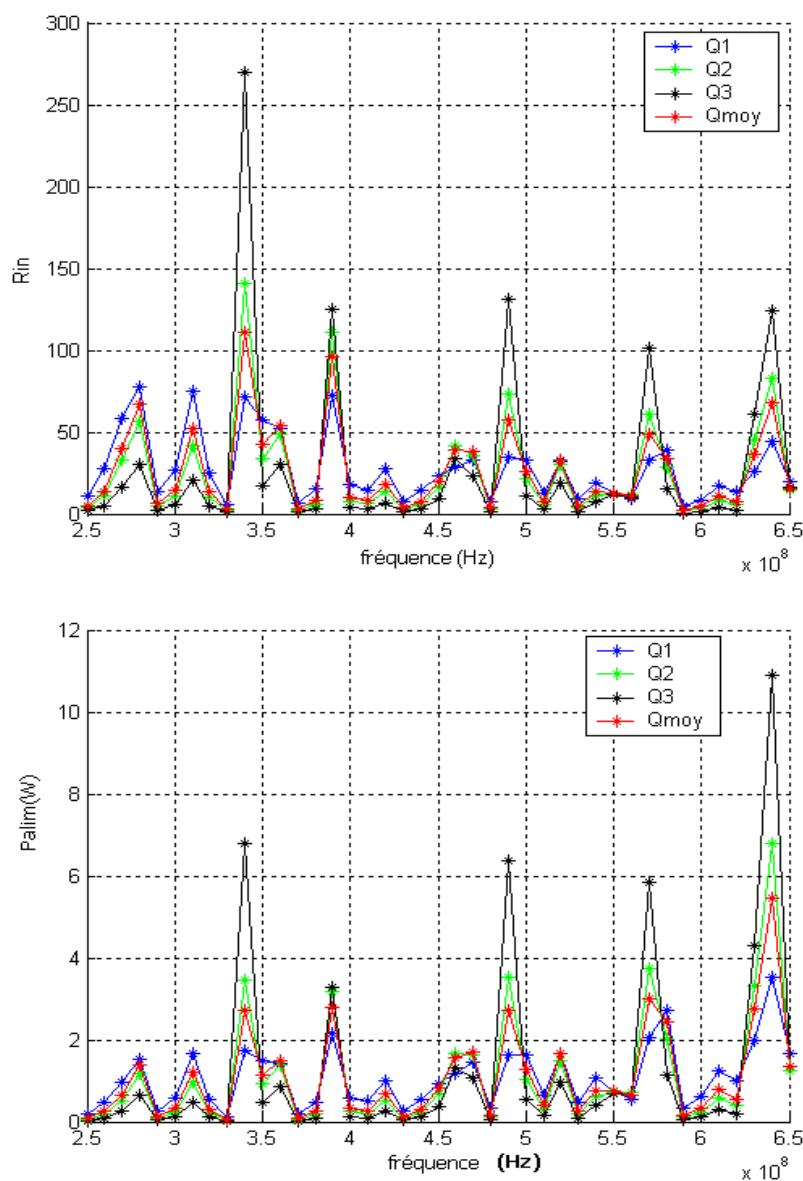
Le comportement de ces deux paramètres a été étudié pour différentes valeurs du coefficient de qualité (Fig.3.22) et à diverses fréquences. Comme nous pouvons le remarquer sur la Fig.3.23, une augmentation du coefficient de qualité entraîne une augmentation de la valeur de la résistance interne et en conséquence, celle de la puissance d'alimentation.

FIG. 3.22 – Valeurs de Q

Dans cette étude appliquée à la CRBM du LASMEA, le calcul du courant pour une valeur de Q est associé à des temps CPU élevés, conséquence du nombre important de segments dans la discrétisation ainsi que du temps nécessaire pour la convergence des termes de G_z^A .

De plus, la méthode la plus immédiate pour le calcul de la moyenne de la puissance d'alimentation est celle de Monte-Carlo qui nécessite un nombre important d'échantillons donc, de simulations pour converger. A 490 MHz , par exemple, 51 simulations ne suffisent pas à obtenir une moyenne convergente de la puissance d'alimentation (Fig.3.24). De ce fait, l'utilisation d'une méthode de Monte-Carlo pour l'estimation de la puissance d'alimentation du dipôle n'est pas la procédure à privilégier.

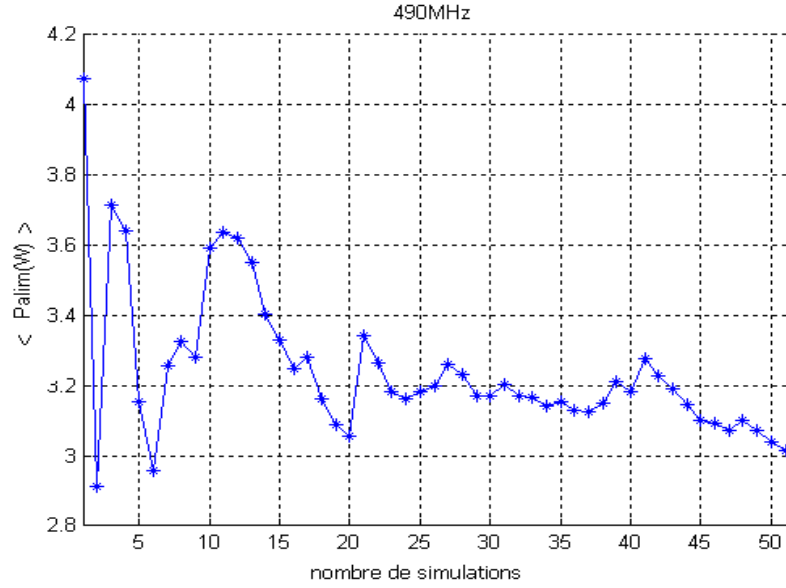
En revanche, le traitement de ce problème par une méthode de collocation stochastique présente l'avantage de conférer une convergence plus rapide à l'estimation de la moyenne des paramètres intrinsèques au dipôle. Ceci fera l'objet du prochain paragraphe.

FIG. 3.23 – R_{in} et P_{alim} en fonction de Q

3.5.5 Estimation de la moyenne des paramètres intrinsèques au dipôle par une méthode de collocation stochastique

La première étape consiste à projeter les différents termes contenant l'aléa Q représentant le facteur de qualité sur la base des polynômes de Lagrange à savoir :

$$\begin{aligned} G_{z1}^A(Q) &\approx \sum_{q=0}^n (G_{z1}^A)_q L_q(Q) \text{ avec } (G_{z1}^A)_q = G_{z1}^A(Q_q) \\ G_{z2}^A(Q) &\approx \sum_{q=0}^n (G_{z2}^A)_q L_q(Q) \text{ avec } (G_{z2}^A)_q = G_{z2}^A(Q_q) \end{aligned} \quad (3.78)$$

FIG. 3.24 – $\ll P_{alim} \gg$ en fonction du nombre de simulations à 490 MHz

Après développement, réarrangement et utilisation des propriétés de Lagrange, nous obtenons :

$$\sum_{u=1}^M (A_{pu})_q (a_u)_q = (b_p)_q \text{ avec } q = 0, \dots, n \quad (3.79)$$

Or :

$$P_{alim}(Q) = \frac{1}{2} \text{real}(V_0 I_0^*(Q)) \quad (3.80)$$

Après développement, il apparaît que :

$$P_{alim}(Q) \approx \sum_{q=0}^n (P_{alim})_q L_q(Q) \quad (3.81)$$

La valeur moyenne de P_{alim} est alors donnée par :

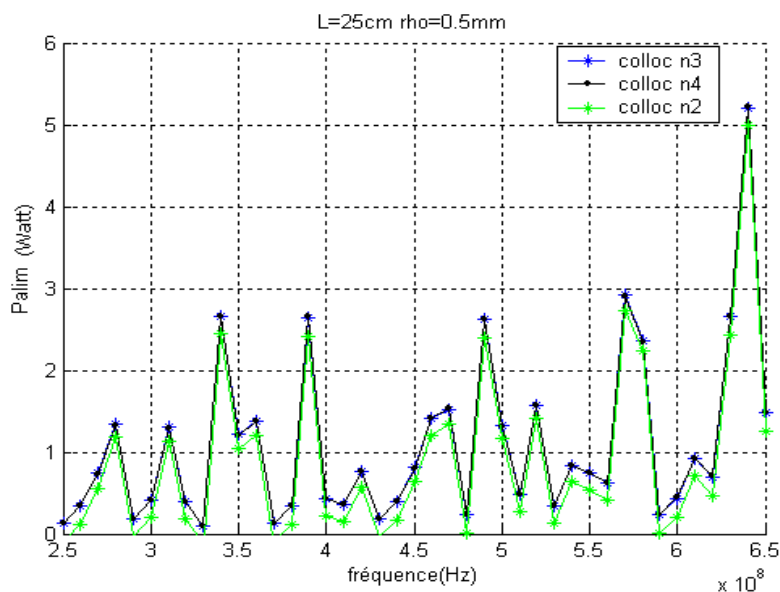
$$\ll P_{alim} \gg \approx \sum_{q=0}^n \psi_q (P_{alim})_q \quad (3.82)$$

avec $(\psi_q)_{0 \leq q \leq n}$ le poids des différentes variables et $(a_q)_{0 \leq q \leq n}$ les points de collocation associés.

Il est à noter que la convergence de la puissance d'alimentation est obtenue avec seulement 3 points de collocation.

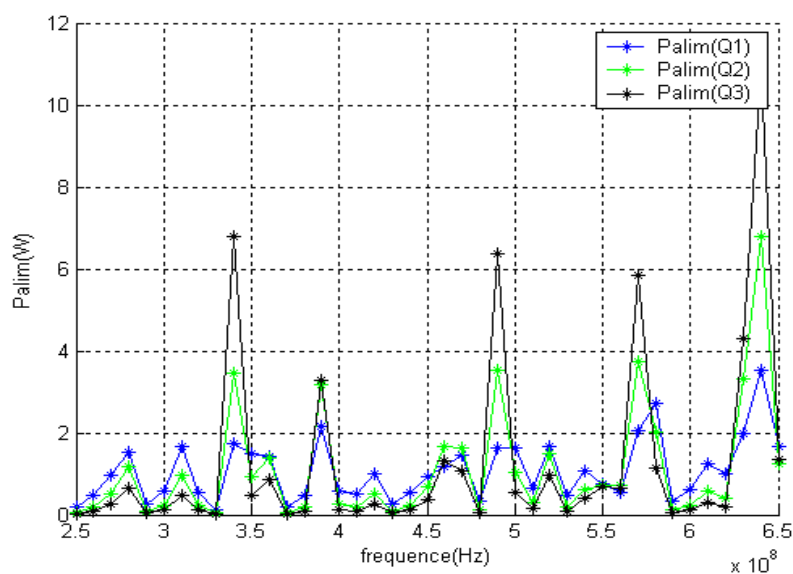
A 600 MHz où $Q_{moy} = 5805$, les valeurs des points de collocation et leurs poids respectifs sont donnés dans Tab. 3.5.

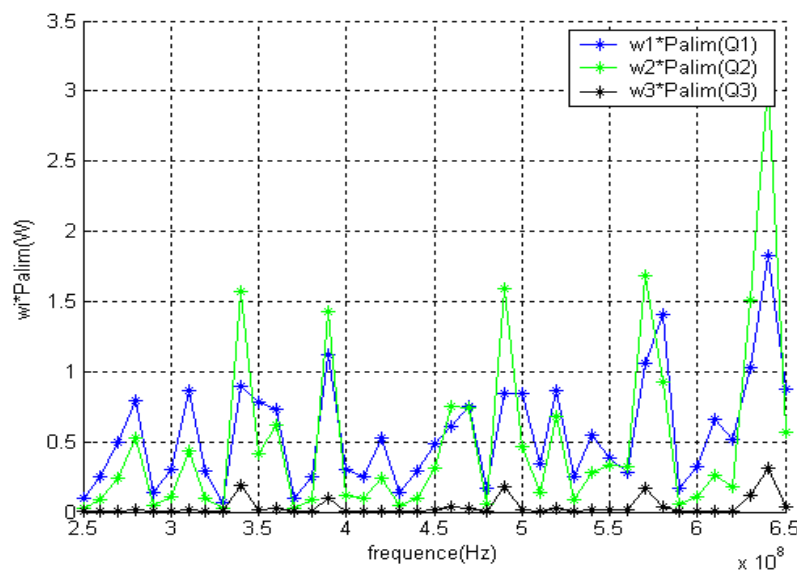
La première étape du calcul consiste donc à estimer les inconnues pour chaque valeur de Q (Fig.3.26).

FIG. 3.25 – Convergence de P_{alim}

Coefficient de qualité	Poids
$Q_1 = 2839$	0.5187
$Q_2 = 8068$	0.4529
$Q_3 = 17161$	0.0284

TAB. 3.5 – Points de collocation avec leur poids respectifs à 600MHz

FIG. 3.26 – P_{alim} en fonction des points de collocation

FIG. 3.27 – *Prise en compte des poids des points de collocation*

La deuxième étape consiste à multiplier les différentes valeurs obtenues précédemment par leurs poids respectifs (Fig.3.27). Enfin, la dernière étape consiste à évaluer la moyenne des paramètres en sommant les différentes valeurs obtenues lors de la deuxième étape. Sur la Fig.3.28 sont représentées les valeurs moyennes de la puissance d'alimentation obtenues par les différentes méthodes à savoir :

- la méthode de Monte-Carlo avec 51 valeurs expérimentales du coefficient de qualité prélevées au centre du volume utile,
- la méthode de collocation avec 3 échantillons,
- une simulation avec Q_{moy} .

Nous pouvons remarquer que la puissance d'alimentation obtenue avec Q_{moy} est quasiment identique à celle obtenue à partir des méthodes probabilistes. Néanmoins, l'avantage principal de ces méthodes est de pouvoir obtenir les autres moments statistiques de la puissance d'alimentation.

Une méthodologie identique permet de déterminer la valeur moyenne de la résistance interne du dipôle (Fig.3.29).

Des études antérieures [42] ont montré que le rapport entre la résistance interne d'un dipôle en cavité et celle obtenue avec le même dipôle en espace libre (Fig.3.30), ne dépend pas de la longueur du dipôle. Ce rapport dépend uniquement des propriétés de la cavité et doit être inférieur à 1.

Ce résultat est obtenu à partir de l'approche proposée dès 420 MHz . En effet, rappelons que la valeur du coefficient de qualité considérée dans cette étude correspond aux pertes dans les parois : cette hypothèse n'est légitime qu'à partir de cette fréquence, si l'on se réfère aux résultats illustrés par la Fig.3.1.

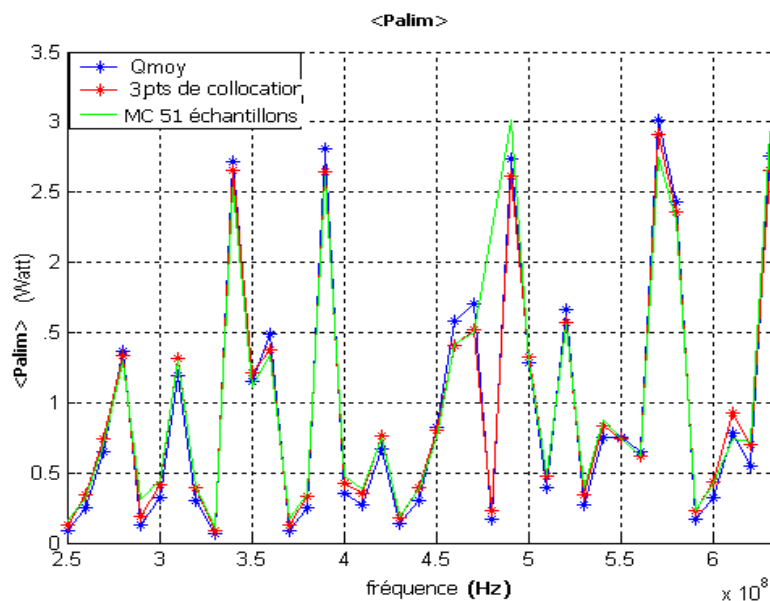


FIG. 3.28 – Valeurs moyennes de la puissance d'alimentation

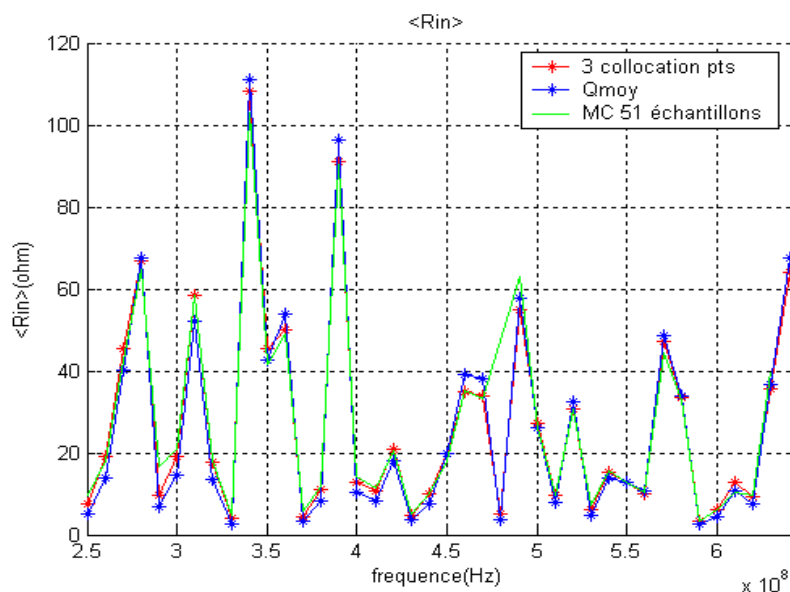
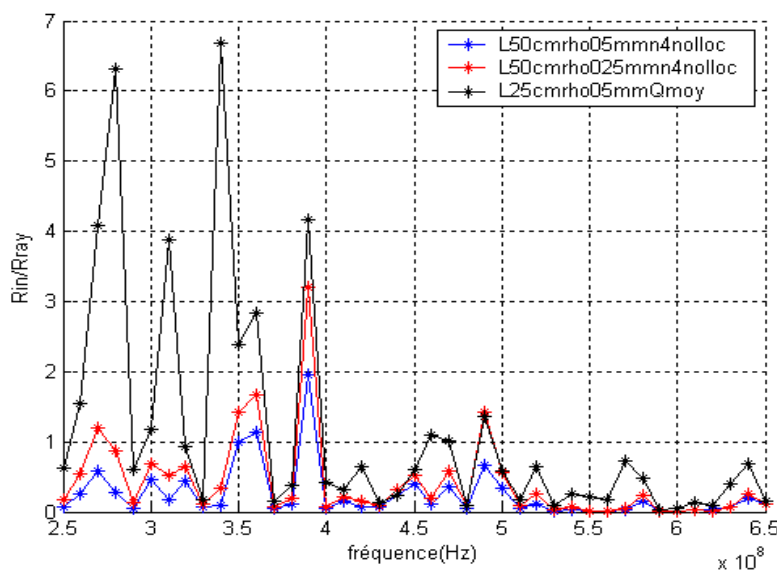


FIG. 3.29 – Valeurs moyennes de la résistance interne

Dans ce paragraphe, le facteur de qualité de la CRBM est considéré comme une variable aléatoire, l'objectif étant d'estimer l'influence de la cavité sur la résistance interne et la puissance d'alimentation d'un dipôle placé au centre de la CRBM. La distribution du courant le long du dipôle a ainsi pu être obtenue au moyen de la résolution de l'équation de Hallén par la méthode des moments, la cavité étant prise en compte par le nombre d'onde fonction du facteur de qualité du système.

FIG. 3.30 – Rapport R_{in}/R_{ray}

Nous avons montré l'efficacité de la méthode de collocation stochastique proposée en utilisant des données expérimentales obtenues dans la CRBM du LASMEA. Seuls 3 points de collocation sont nécessaires pour obtenir des résultats comparables aux simulations de Monte Carlo.

Cette méthode a également permis de retrouver des résultats précédemment validés numériquement à savoir le rapport entre les résistances internes du dipôle en cavité et en espace libre, d'où la validation du modèle probabiliste de la CRBM.

Conclusion

Dans ce chapitre a été proposée une approche originale pour la modélisation numérique d'une CRBM. Cette approche repose sur une analogie entre la CRBM et une cavité dont les parois sont caractérisées par une conductivité aléatoire. Dans un premier temps, la loi de distribution de ce paramètre a été établie à partir de mesures en CRBM et d'une formulation validée dans les hautes fréquences. L'application d'une méthode de collocation stochastique aux équations de Maxwell a alors permis de caractériser numériquement, au second ordre, le champ électromagnétique interne, à partir d'un faible nombre de simulations de la cavité sans brasseur et d'une introduction directe des pertes réelles dans la résolution FDTD de ces équations. La comparaison avec le coefficient de variation du module du champ électromagnétique issu de mesures expérimentales en 80 points du volume utile de la CRBM du LASMEA a montré que cette méthode est applicable dans la zone de fonctionnement optimale de la CRBM i.e. là où les lois de probabilité théoriques semblent valables. Une fois cette approche validée dans une CRBM à vide, l'étude de l'émission d'un dipôle dans cette structure a pu être réalisée. Ceci nous a amené à analyser le comportement des paramètres intrinsèques à un dipôle placé dans une CRBM. Là encore, une analogie probabiliste a été réalisée entre le coefficient de qualité de la CRBM et le brasseur, analogie permettant de s'affranchir de la simulation de ce dernier. D'autre part, le courant a pu être estimé par la résolution de l'équation de Hallén par la méthode des moments, cette équation faisant intervenir une fonction de Green de la cavité, dont l'intérêt est de s'affranchir de la simulation de la cavité. Les résultats ont pu montrer

que seule la partie réelle de la résistance interne du dipôle varie. Par ailleurs, le fait que le rapport entre les résistances internes du dipôle en cavité et en espace libre ne dépende pas de la longueur du dipôle et qu'il doive être inférieur à l'unité, a pu être vérifié.

Cette approche a pu ainsi conduire à une amélioration importante en temps de calcul permettant d'envisager des simulations plus complexes.

Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire contribuent à l'analyse du comportement de CRBM, en présence ou non de systèmes sous test, par des méthodes statistiques, afin d'accéder à des informations que ni les mesures expérimentales, ni les simulations numériques déterministes ne peuvent fournir de manière directe.

Dans le premier chapitre, l'application de tests statistiques d'adéquation de lois théoriques et d'homogénéité a été effectuée afin de vérifier, en CRBM réelle, la validité des propriétés et hypothèses relatives aux grandeurs électromagnétiques. Cette opération a permis de déterminer une fréquence limite d'utilisation de la CRBM du LASMEA pour l'analyse, à partir de méthodes probabilistes, de l'immunité de systèmes électroniques ne modifiant pas l'environnement, en l'occurrence une ligne de transmission. En effet, la connaissance des lois de probabilité des grandeurs électromagnétiques a permis de déterminer la densité de probabilité du courant induit à l'extrémité de la ligne, sans nécessiter de temps de calculs importants. Cette approche probabiliste a, par la suite, été validée par comparaison des travaux précédemment réalisés pour lesquels le champ électromagnétique est considéré comme une somme finie d'ondes planes. L'expression analytique du courant, en fonction du champ électromagnétique, utilisée prend en compte l'influence non négligeable en CRBM, des fils de descente de la ligne de transmission. En vue d'une meilleure interprétation des résultats issus de la CRBM à partir de ceux, mieux maîtrisés, obtenus en CA, une relation simple entre les champs électriques de calibrage en CA et en CRBM a été établie en considérant un niveau d'immunité équivalent. Cette relation qui fait intervenir la directivité de l'équipement sous test, apporte une précision aux études précédemment réalisées dans ce cadre. L'avantage de la méthode probabiliste présentée dans ce chapitre a été de s'affranchir de la simulation de la CRBM. Il est à noter que la méthodologie proposée, qui utilise les propriétés statistiques du second ordre du champ électrique, reste valable quelle que soit la densité de probabilité de ce dernier.

La CRBM étant proposée comme moyen d'essai alternatif en immunité rayonnée pour les équipements confinés dans des enceintes métalliques fermées ou semi-fermées, il est important de bien interpréter les résultats issus du moyen d'essais, mais aussi d'appréhender en quel sens l'environnement en CRBM peut être comparé à celui généré à l'intérieur de ces enceintes soumises à un champ électromagnétique perturbateur. Il a donc été proposé, dans un deuxième chapitre, une comparaison entre les densités de probabilités des champs électromagnétiques en CRBM et dans un véhicule automobile illuminé par plusieurs configurations d'ondes planes. Les résultats obtenus ont montré que l'environnement électromagnétique des appareils électroniques situés dans un véhicule est statistiquement différent de l'environnement électromagnétique d'une CRBM. Ces premiers résultats montrent le besoin de réadapter les protocoles de mesure des équipements en CRBM, et en particulier de préciser l'utilisation d'un plan de masse.

En revanche, l'environnement électromagnétique au centre du véhicule est comparable à celui d'une CRBM à partir d'une certaine fréquence dépendant des dimensions de l'habitacle du véhicule. Ce point est important pour les essais d'immunité des dispositifs situés au centre du véhicule et également pour les

conditions de protection sanitaire notamment pour la mesure de la puissance absorbée par des tissus biologiques. Afin d'approfondir l'étude des paramètres statistiques (interdépendances et intercorrélations) du champ électromagnétique, une technique d'estimation de champ aléatoire a été appliquée au champ électromagnétique de l'habitacle du véhicule automobile. Les résultats obtenus portent à croire que les hypothèses de Hill relatives à l'indépendance des parties réelles et imaginaires du champ électrique en CRBM idéale sont vérifiées au centre de l'habitacle. En revanche, ces composantes deviennent corrélées lorsque l'on se rapproche de la caisse du véhicule ; corrélation qui est fonction de la fréquence. Toutefois, ces techniques d'estimation n'ont pas pu être appliquées en CRBM réelle du fait de la méconnaissance de certaines données du champ électromagnétique (parties réelles et imaginaires des composantes), difficilement accessibles expérimentalement et numériquement.

De ce fait, a été proposée dans le troisième chapitre, une nouvelle méthode d'estimation des paramètres statistiques du second ordre du champ électromagnétique. Pour cela, il a fallu proposer un modèle probabiliste de la CRBM reposant sur une analogie entre le brasseur de modes en rotation et la conductivité des parois de la CRBM. L'utilisation d'une méthode de collocation stochastique permet alors une simulation de la CRBM en l'absence du brasseur, ainsi qu'une introduction directe des pertes réelles dans la résolution FDTD des équations de Maxwell. La méthode présentée dans ce chapitre permet une estimation des paramètres probabilistes du champ électromagnétique dans la CRBM en l'absence du brasseur de modes, rendant ainsi les simulations moins coûteuses. D'autre part, les résultats sont obtenus avec un nombre restreint de valeurs de conductivité donc, de simulations de la cavité à vide. La comparaison avec les mesures expérimentales tend à montrer que cette méthode est applicable dans la zone de fonctionnement optimale de la CRBM i.e. là où les lois de probabilité théoriques ne sont pas rejetées.

Une fois cette approche validée dans une CRBM à vide, l'étude de l'émission d'un dipôle dans cette structure a pu être réalisée. Ces travaux ont conduit à l'analyse du comportement des paramètres intrinsèques à un dipôle placé dans une CRBM. Cette étude repose sur une analogie probabiliste entre le coefficient de qualité de la CRBM et le brasseur, analogie permettant de s'affranchir de la simulation de ce dernier. D'autre part, le courant a pu être estimé par la résolution de l'équation de Hallén par la méthode des moments, cette équation faisant intervenir une fonction de Green de la cavité, dont l'intérêt est de s'affranchir de la simulation de la cavité. Les résultats ont pu montrer que, seule la partie réelle de la résistance interne du dipôle varie. D'autre part le fait que le rapport entre les résistances internes du dipôle en cavité et en espace libre ne dépende pas de la longueur du dipôle et qu'il doive être inférieur à l'unité, a pu être vérifié.

Perspectives

L'utilisation des techniques statistiques pour l'étude des CRBM est récente. Les travaux présentés dans ce mémoire concernent la CRBM soit à vide, soit chargée par des systèmes ne modifiant pas l'environnement électromagnétique. Il serait dès lors intéressant d'étudier le comportement statistique du champ électromagnétique dans une CRBM chargée de systèmes électroniques complexes. Toutefois, comme pour la CRBM à vide, la modélisation probabiliste nécessiterait un certain nombre de données pour l'estimation et la simulation du champ électromagnétique aléatoire. Cette phase de modélisation est néanmoins nécessaire dans le domaine de la CEM où demeure l'incertain puisqu'elle permet une meilleure représentation des lois de probabilité des paramètres aléatoires. Des études de fiabilité et de sûreté de fonctionnement peuvent alors être envisagées à partir de la connaissance des lois de probabilité des différents paramètres aléatoires.

Annexe A

Quelques définitions

A.1 Variable aléatoire

Soit (A, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité. On dit que \mathbb{X} est une variable aléatoire définie sur (A, \mathcal{A}, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^n si \mathbb{X} est une application mesurable de (A, \mathcal{A}, P) dans $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$, c'est-à-dire si \mathbb{X} est une application de A dans \mathbb{R}^n , mesurable de (\mathcal{A}, P) dans $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}^n)$, \mathbb{B}^n désignant la tribu borélienne de \mathbb{R}^n .

Terminologie

-Pour tout a fixé dans A , $\mathbb{X}(a)$ est appelé une réalisation de la variable aléatoire \mathbb{X} . C'est un élément de \mathbb{R}^n que nous désignerons par $\hat{x} : \mathbb{X}(a) = \hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, avec $\hat{x}_i = \mathbb{X}_i(a) \in \mathbb{R}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

-Tirer une réalisation de \mathbb{X} , c'est "choisir au hasard" un a dans A et lui associer la valeur correspondante $\mathbb{X}(a) = \hat{x} \in \mathbb{R}^n$ de \mathbb{X} .

A.2 Processus aléatoire

Soit \overline{T} un ensemble de variables (temps, espace, espace-temps), (A, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité, $(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$ un ensemble d'états.

-Un processus indexé par \overline{T} , d'espace des états \mathfrak{E} , basé sur (A, \mathcal{A}, P) est une famille de variables aléatoires $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_t, t \in \overline{T})$ définies sur (A, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans $(\mathfrak{E}, \mathfrak{G})$.

-La fonction $t \rightarrow \mathbb{X}_a(t)$ est une réalisation du processus \mathbb{X} , appelée trajectoire de \mathbb{X} .

-Le processus \mathbb{X} est strictement stationnaire si sa loi de probabilité est invariante par translation temporelle. Autrement dit, pour tout entier N , toute suite finie d'instants (t_1, \dots, t_N) et tout $\nu > 0$, la loi du vecteur aléatoire $(\mathbb{X}(t_1), \dots, \mathbb{X}(t_N))$ est la même que celle du vecteur $(\mathbb{X}(t_1 + \nu), \dots, \mathbb{X}(t_N + \nu))$.

-Le processus \mathbb{X} est stationnaire du second ordre si et seulement si sa moyenne est constante et sa fonction de corrélation ne dépend que de ν .

A.3 Champ aléatoire

Un processus $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_t, t \in \overline{T})$ défini sur (A, \mathcal{A}, P) , indexé par \overline{T} , à valeurs dans \mathbb{R}^n ($n \geq 1$) est appelé un champ aléatoire si \overline{T} est un sous-ensemble de \mathbb{R}_d (éventuellement \mathbb{R}_d tout entier), avec $d > 1$. Autrement dit, \mathbb{X} est un champ aléatoire si sa variable d'indexation t est un élément vectoriel de dimension $d > 1$.

Pour les champs aléatoires, le qualificatif "stationnaire" doit être remplacé par "homogène".

Annexe B

Quelques lois dérivées de la loi gaussienne : loi de Rayleigh généralisée d'ordre n , loi du khi-deux à n ddl, loi du khi-quatre à n ddl

B.1 Notations

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier ≥ 1 , p un entier ≥ 0 et $\mathring{G} = (\mathring{G}_1, \dots, \mathring{G}_n)$ une variable aléatoire (v.a.) gaussienne standard à valeurs dans \mathbb{R}^n (i.e. gaussienne, n -dimensionnelle, de moyenne nulle et de matrice de covariance unité), ce que l'on spécifiera par la notation usuelle : $\mathring{G} \sim \mathcal{N}(0_n, I_{n \times n})$, où 0_n (moyenne de \mathring{G}) est l'élément nul de $\mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^{n \times 1}$ et $I_{n \times n}$ (covariance de \mathring{G}) l'élément unité de $\mathbb{R}^{n \times n}$. De plus, on note classiquement Φ la fonction de répartition de la loi gaussienne standard scalaire, telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (\text{B.1})$$

Par ailleurs, beaucoup de formules dans ce qui suit contenant la fonction Γ , nous rappelons que cette fonction est définie, pour $x > 0$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} u^{x-1} e^{-u} du \quad (\text{B.2})$$

et se prolonge à \mathbb{R} par la relation :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (\text{B.3})$$

De plus, elle vérifie :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \quad 0 < x < 1 \quad (\text{B.4})$$

et est telle que, $\forall m \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(m+1) = m! \quad (\text{B.5})$$

Enfin, on retiendra ses trois valeurs remarquables :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1 \quad (\text{B.6})$$

B.2 Loi de Rayleigh généralisée d'ordre n

On appelle *loi de Rayleigh généralisée d'ordre n* la loi de la v.a. \mathbb{X} telle que :

$$\mathbb{X} = \|\mathring{\mathbf{G}}\| = \sqrt{\mathring{G}_1^2 + \dots + \mathring{G}_n^2} \quad (\text{B.7})$$

où $\mathring{\mathbf{G}} = (\mathring{G}_1, \dots, \mathring{G}_n)$ est une v.a. gaussienne standard n -dimensionnelle : $\mathring{\mathbf{G}} \sim \mathcal{N}(0_n, I_{n \times n})$.

On spécifie le fait que \mathbb{X} suit une telle loi en notant :

$$\mathbb{X} \sim \mathcal{R}_n \quad (\text{B.8})$$

Densité de probabilité

$$p_{\mathbb{X}}(x) = \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.9})$$

Fonction de répartition

$$F_{\mathbb{X}}(x) = P(\mathbb{X} < x) = (1 - H_n(x)) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.10})$$

$$H_n(x) = \begin{cases} 2\Phi(-x) & \text{si } n = 1 \\ 2\Phi(-x) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=2}^{(n+1)/2} \frac{2^{k-2} (k-2)!}{(2k-3)!} x^{2k-3} & \text{si } n \text{ impair } \geq 3 \\ e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \frac{x^{2k}}{2^k k!} & \text{si } n \text{ pair } \geq 2 \end{cases}$$

Moment d'ordre p

$$\mu_{\mathbb{X}}^{(p)} = \mathbb{E}[\mathbb{X}^p] = \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (\text{B.11})$$

B.3 Loi de Rayleigh généralisée d'ordre n à facteur d'échelle

Soit λ un réel > 0 . On appelle *loi de Rayleigh généralisée d'ordre n à facteur d'échelle λ* , la loi de la v.a. $\lambda\mathbb{X}$, avec $\mathbb{X} \sim \mathcal{R}_n$, donc de la v.a. $\lambda\|\mathring{\mathbf{G}}\|$, avec $\mathring{\mathbf{G}} \sim \mathcal{N}(0_n, I_{n \times n})$. Posant :

$$\mathbb{X}_{\lambda} = \lambda\mathbb{X} = \lambda\|\mathring{\mathbf{G}}\| \quad (\text{B.12})$$

on spécifie le fait que cette v.a. suit une loi \mathcal{R}_n à facteur d'échelle λ en notant :

$$\mathbb{X}_{\lambda} \sim \mathcal{R}_{n,\lambda} \quad (\text{B.13})$$

Densité de probabilité

$$p_{\mathbb{X}_{\lambda}}(x) = \frac{1}{\lambda} p_{\mathbb{X}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}}}{\lambda^n 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.14})$$

Fonction de répartition

$$F_{\mathbb{X}_\lambda}(x) = P(\mathbb{X}_\lambda < x) = F_{\mathbb{X}}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = (1 - H_{n,\lambda}(x))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{B.15})$$

$$H_{n,\lambda}(x) = \begin{cases} 2\Phi\left(-\frac{x}{\lambda}\right) & \text{si } n = 1 \\ 2\Phi\left(-\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \sum_{k=2}^{(n+1)/2} \frac{2^{k-2}(k-2)!}{(2k-3)!} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2k-3} & \text{si } n \text{ impair} \geq 3 \\ e^{-\frac{x^2}{2\lambda^2}} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \frac{1}{2^k k!} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{2k} & \text{si } n \text{ pair} \geq 2 \end{cases}$$

Moment d'ordre p

$$\mu_{\mathbb{X}_\lambda}^{(p)} = \mathbb{E}[\mathbb{X}_\lambda^p] = \lambda^p \mu_{\mathbb{X}}^{(p)} = \lambda^p \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (\text{B.16})$$

B.4 Loi du khi-deux à n ddl

On appelle *loi du khi-deux à n degrés de liberté (ddl)* la loi de la v.a. \mathbb{X}^2 , avec $\mathbb{X} \sim \mathcal{R}_n$, donc de la v.a. $\|\mathring{\mathbf{G}}\|^2$, avec $\mathring{\mathbf{G}} \sim \mathcal{N}(0_n, I_{n \times n})$. Posant :

$$Y = \mathbb{X}^2 = \|\mathring{\mathbf{G}}\|^2 \quad (\text{B.17})$$

on spécifie le fait que cette v.a. suit une loi du khi-deux à n ddl en notant :

$$Y \sim \chi_n^2 \quad (\text{B.18})$$

Densité de probabilité

$$p_Y(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{B.19})$$

Fonction de répartition

$$F_Y(y) = P(Y < y) = (1 - K_n(y))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{B.20})$$

$$K_n(y) = \begin{cases} 2\Phi(-\sqrt{y}) & \text{si } n = 1 \\ 2\Phi(-\sqrt{y}) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}} \sum_{k=2}^{(n+1)/2} \frac{2^{k-2}(k-2)!}{(2k-3)!} y^{k-\frac{3}{2}} & \text{si } n \text{ impair} \geq 3 \\ e^{-\frac{y}{2}} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \frac{y^k}{2^k k!} & \text{si } n \text{ pair} \geq 2 \end{cases}$$

Moment d'ordre p

$$\mu_Y^{(p)} = \mathbb{E}[Y^p] = \frac{2^p \Gamma\left(p + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \quad (\text{B.21})$$

B.5 Loi du khi-deux à n ddl à facteur d'échelle

Soit α un réel > 0 . On appelle *loi du khi-deux à n ddl à facteur d'échelle α* , la loi de la v.a. αY , avec $Y \sim \chi_n^2$, donc de la v.a. $\alpha \|\dot{G}\|^2$, avec $\dot{G} \sim \mathcal{N}(0_n, I_{n \times n})$. Posant :

$$Y_\alpha = \alpha Y = \alpha \|\dot{G}\|^2 \quad (\text{B.22})$$

on spécifie le fait que cette v.a. suit une loi du χ_n^2 à facteur d'échelle α en notant :

$$Y_\alpha \sim \chi_{n,\alpha}^2 \quad (\text{B.23})$$

Densité de probabilité

$$p_{Y_\alpha}(y) = \frac{1}{\alpha} p_Y\left(\frac{y}{\alpha}\right) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2\alpha}}}{(2\alpha)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{B.24})$$

Fonction de répartition

$$F_{Y_\alpha}(y) = P(Y_\alpha < y) = F_Y\left(\frac{y}{\alpha}\right) = (1 - K_{n,\alpha}(y)) \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(y), \quad y \in \mathbb{R} \quad (\text{B.25})$$

$$K_{n,\alpha}(y) = \begin{cases} 2\Phi\left(-\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right) & \text{si } n = 1 \\ 2\Phi\left(-\sqrt{\frac{y}{\alpha}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2\alpha}} \sum_{k=2}^{(n+1)/2} \frac{2^{k-2}(k-2)!}{(2k-3)!} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{k-\frac{3}{2}} & \text{si } n \text{ impair } \geq 3 \\ e^{-\frac{y}{2\alpha}} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \frac{1}{2^k k!} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^k & \text{si } n \text{ pair } \geq 2 \end{cases}$$

Moment d'ordre p

$$\mu_{Y_\alpha}^{(p)} = \mathbb{E}[Y_\alpha^p] = \alpha^p \mu_Y^{(p)} = \alpha^p \frac{2^p \Gamma(p + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (\text{B.26})$$

B.6 Loi du khi-quatre à n ddl

On appelle *loi du khi-quatre à n ddl* la loi de la v.a. Y^2 , avec $Y \sim \chi_n^2$, donc de la v.a. $\|\dot{G}\|^4$, avec $\dot{G} \sim \mathcal{N}(0_n, I_{n \times n})$. Posant :

$$Z = Y^2 = \|\dot{G}\|^4 \quad (\text{B.27})$$

on spécifie le fait que cette v.a. suit une loi du khi-quatre à n ddl en notant :

$$Z \sim \chi_n^4 \quad (\text{B.28})$$

Densité de probabilité

$$p_Z(z) = \frac{z^{\frac{n}{4}-1} e^{-\frac{\sqrt{z}}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (\text{B.29})$$

Fonction de répartition

$$F_Z(z) = P(Z < z) = (1 - Q_n(z))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (\text{B.30})$$

$$Q_n(z) = \begin{cases} 2\Phi(-z^{\frac{1}{4}}) & \text{si } n = 1 \\ 2\Phi(-z^{\frac{1}{4}}) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\sqrt{z}}{2}} \sum_{k=2}^{(n+1)/2} \frac{2^{k-2}(k-2)!}{(2k-3)!} z^{\frac{k}{2}-\frac{3}{4}} & \text{si } n \text{ impair } \geq 3 \\ e^{-\frac{\sqrt{z}}{2}} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \frac{z^{\frac{k}{2}}}{2^k k!} & \text{si } n \text{ pair } \geq 2 \end{cases}$$

Moment d'ordre p

$$\mu_Z^{(p)} = \mathbb{E}[Z^p] = \frac{2^{2p}\Gamma(2p + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (\text{B.31})$$

B.7 Loi du khi-quatre à n ddl à facteur d'échelle

Soit β un réel > 0 . On appelle *loi du khi-quatre à n ddl à facteur d'échelle β* , la loi de la v.a. βZ , avec $Z \sim \chi_n^4$, donc de la v.a. $\beta \|\dot{\mathbf{G}}\|^4$, avec $\dot{\mathbf{G}} \sim \mathcal{N}(0_n, I_{n \times n})$. Posant :

$$Z_\beta = \beta Z = \beta \|\dot{\mathbf{G}}\|^4 \quad (\text{B.32})$$

on spécifie le fait que cette v.a. suit une loi du χ_n^4 à facteur d'échelle β en notant :

$$Z_\beta \sim \chi_{n,\beta}^4 \quad (\text{B.33})$$

Densité de probabilité

$$p_{Z_\beta}(z) = \frac{1}{\beta} p_Z\left(\frac{z}{\beta}\right) = \frac{z^{\frac{n}{4}-1} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{\beta}}}}{\beta^{\frac{n}{4}} 2^{\frac{n}{2}+1} \Gamma(\frac{n}{2})} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (\text{B.34})$$

Fonction de répartition

$$F_{Z_\beta}(z) = P(Z_\beta < z) = F_Z\left(\frac{z}{\beta}\right) = (1 - Q_{n,\beta}(z))\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(z), \quad z \in \mathbb{R} \quad (\text{B.35})$$

$$Q_{n,\beta}(z) = \begin{cases} 2\Phi\left(-\left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}\right) & \text{si } n = 1 \\ 2\Phi\left(-\left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}}\right) + \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{\beta}}} \sum_{k=2}^{(n+1)/2} \frac{2^{k-2}(k-2)!}{(2k-3)!} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{k}{2}-\frac{3}{4}} & \text{si } n \text{ impair } \geq 3 \\ e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z}{\beta}}} \sum_{k=0}^{(n-2)/2} \frac{1}{2^k k!} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\frac{k}{2}} & \text{si } n \text{ pair } \geq 2 \end{cases}$$

Moment d'ordre p

$$\mu_{Z_\beta}^{(p)} = \mathbb{E}[Z_\beta^p] = \beta^p \mu_Z^{(p)} = \beta^p \frac{2^{2p}\Gamma(2p + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (\text{B.36})$$

Annexe C

Vérification de l'ajustement d'une loi théorique à une distribution empirique par le test d'adéquation du χ^2

C.1 Introduction

Le test du χ^2 (khi-deux) peut être utilisé à des fins diverses. Il permet, par exemple, de juger si plusieurs échantillons statistiques proviennent ou non d'une même population (test d'homogénéité) ou si deux variables aléatoires dont on connaît des réalisations peuvent ou non être considérées comme indépendantes (test d'indépendance). On peut également y recourir pour décider si une loi théorique choisie *a priori* pour caractériser une répartition expérimentale doit ou non être rejetée (test de conformité ou d'adéquation). C'est dans cette fonction que nous le considérons ici.

C.2 Position du problème

Le problème à résoudre est le suivant : on dispose d'une répartition empirique issue du traitement statistique d'un échantillon expérimental et on cherche une loi théorique qui approxime au mieux cette répartition. Or, même si la loi théorique est bien choisie, certains écarts entre celle-ci et la répartition empirique sont inévitables. Une question se pose alors tout naturellement : ces écarts sont-ils dus uniquement aux incertitudes d'échantillonnage ou proviennent-ils de ce que nous avons mal choisi la loi théorique approximante ? Le test du χ^2 permet de répondre à cette question.

C.3 Principe du test

La donnée de départ est un N -échantillon expérimental ordonné $E_N = \{\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N\}$, supposé de taille suffisamment grande. Les éléments de cet échantillon sont assimilés à des réalisations indépendantes d'une variable aléatoire réelle \mathbb{X} et on suppose qu'un certain nombre de raisons liées au contexte de l'étude permettent de conjecturer pour \mathbb{X} une répartition selon une loi de probabilité théorique donnée $\mathbb{P}_{\mathbb{X}}$. Les paramètres dont dépend cette loi ayant été déterminés (nous reviendrons sur ce point plus loin), il s'agit alors de savoir si elle constitue une approximation acceptable de la répartition expérimentale. Pour cela, on procède comme suit. Soit S le support de la loi théorique, dont on notera qu'il peut revêtir plusieurs formes (par exemple, $S =]-\infty, b]$, $S = [a, +\infty[$, $S = [a, b]$, avec a et b des réels finis), mais doit vérifier, dans tous les cas : $S \supset [\hat{x}_1, \hat{x}_N]$. Ce support étant connu, on le partitionne en K intervalles

I_1, \dots, I_K ($K \ll N$) et on comptabilise les éléments de E_N contenus dans chacun de ces intervalles. Ce faisant, on obtient une répartition des données expérimentales en K classes disjointes C_1, \dots, C_K , telles que, $\forall j \in J_K = \{1, \dots, K\}$, C_j est la famille des éléments de E_N appartenant à l'intervalle I_j . On a donc :

$$\bigcup_{j \in J_K} C_j = E_N \quad ; \quad C_i \cap \bigcap_{\substack{j \in J_K \\ i \neq j}} C_j = \emptyset \quad (\text{C.1})$$

et, N_j désignant l'effectif de la classe C_j :

$$\sum_{j \in J_K} N_j = N \quad (\text{C.2})$$

où N est le cardinal de E_N (i.e. l'effectif expérimental total).

Soit p_j la probabilité que la v.a. \mathbb{X} , supposée obéir à la loi théorique choisie $\mathbb{P}_{\mathbb{X}}$, prenne des valeurs dans l'intervalle I_j . Notant $F_{\mathbb{X}}$ la fonction de répartition de $\mathbb{P}_{\mathbb{X}}$, on a :

$$p_j = P(\mathbb{X} \in I_j) = \mathbb{P}_{\mathbb{X}}(I_j) = F_{\mathbb{X}}(x_{\max,j}) - F_{\mathbb{X}}(x_{\min,j}) \quad (\text{C.3})$$

où $x_{\min,j}$ et $x_{\max,j}$ sont, respectivement, les bornes inférieure et supérieure de I_j .

A cette probabilité est associé l'effectif théorique $N_{th,j}$ de C_j , tel que :

$$N_{th,j} = N p_j \quad (\text{C.4})$$

On fait l'hypothèse H_0 : "la loi théorique choisie représente bien la répartition expérimentale", autrement dit "les écarts entre les effectifs théoriques et expérimentaux dans les diverses classes sont dus uniquement au hasard de l'échantillonnage". Il s'agit alors de comparer les effectifs théoriques $N_{th,1} = N p_1, \dots, N_{th,K} = N p_K$ et les effectifs expérimentaux N_1, \dots, N_K .

Le test est basé sur l'indicateur de proximité suivant :

$$D = \sum_{j \in J_K} \frac{(N_j - N p_j)^2}{N p_j} \quad (\text{C.5})$$

appelé *distance du χ^2* .

Il est clair que cette grandeur sera d'autant plus petite que la distribution théorique sera proche de la distribution empirique. Si la divergence entre les deux distributions est seulement due aux incertitudes d'échantillonnage (i.e. au hasard), la valeur de D ne devrait pas dépasser, pour un seuil de signification α fixé à l'avance, une certaine valeur limite D_α à déterminer.

K.Pearson a étudié la loi de la v.a. D conditionnellement à l'hypothèse H_0 . Il a montré que, sous l'hypothèse : " $\forall j \in J_K, N p_j \geq 5$ " (i.e. l'effectif théorique minimal de chaque classe est 5), cette v.a. suit une loi du χ^2 à $K - r - 1$ degrés de liberté (i.e. $D \sim \chi_{K-r-1}^2$), où r est le nombre de paramètres inconnus de la loi théorique devant préalablement être estimés à partir de l'échantillon expérimental E_N (par exemple, si l'hypothèse H_0 est : " $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, m et σ connus", alors $r = 0$ et $D \sim \chi_{K-1}^2$; par contre si H_0 est : " $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, m et σ inconnus", alors on estime d'abord m et σ à partir de E_N et dans ce cas $D \sim \chi_{K-3}^2$, car $r = 2$).

Le test est alors conforme à la procédure générale des tests, mais en utilisant ici pour statistique la distance du χ^2 :

1) Au seuil α choisi (par exemple, $\alpha = 0.05$ ou $\alpha = 0.01$), on détermine le nombre D_α tel que :

$$P(D > D_\alpha) = \alpha \quad (\text{C.6})$$

Ceci se fait soit en utilisant une table du χ^2 , soit en résolvant directement l'équation non linéaire en D_α :

$$1 - F_D(D_\alpha) = \alpha \quad (\text{C.7})$$

où F_D est la fonction de répartition de la loi de D , c'est-à-dire du χ^2_{K-r-1} .

2) Si la distance D calculée par (C.5) est supérieure à D_α , alors on rejette l'hypothèse H_0 au seuil de signification α ; dans le cas contraire, on accepte H_0 pour ce seuil. Toutefois, dans ce dernier cas, il importe de souligner que la validité de H_0 n'en est pas pour autant démontrée.

Annexe D

Simulation d'un champ aléatoire vectoriel gaussien, homogène, centré

D.1 Hypothèses sur le champ à simuler

Soient n et d deux entiers ≥ 1 et (\mathcal{A}, Φ, P) un espace de probabilité. Le champ aléatoire vectoriel à simuler est un champ $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t), t \in \mathbb{R}^d)$ défini sur (\mathcal{A}, Φ, P) , à valeurs dans \mathbb{R}^n , indexé sur \mathbb{R}^d (i.e. $t \in \mathbb{R}^d$), gaussien, homogène, centré, continu en moyenne d'ordre deux (m.o.d.), de mesure spectrale $M_{\mathbb{X}}$ admettant une densité $S_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n}$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\omega$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ (i.e. $\forall B \in \mathcal{B}_d, M_{\mathbb{X}}(B) = \int_B S_{\mathbb{X}}(\omega) d\omega$). Ses coordonnées canoniques sont notées $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$. Elles sont telles que $\mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$, où, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{X}_p = (\mathbb{X}_p(t), t \in \mathbb{R}^d)$ est un champ aléatoire défini sur (\mathcal{A}, Φ, P) , à valeurs dans \mathbb{R} , indexé sur \mathbb{R}^d , gaussien, homogène, centré, continu en m.o.d., de mesure spectrale $M_{\mathbb{X}_p}$ admettant une densité $S_{\mathbb{X}_p} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ par rapport à $d\omega$ (i.e. $\forall B \in \mathcal{B}_d, M_{\mathbb{X}_p}(B) = \int_B S_{\mathbb{X}_p}(\omega) d\omega$) et tel que $\mathbb{X}_p = \langle \mathbb{X}, e_p \rangle_n$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ est le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{R}^n et (e_1, \dots, e_n) la base canonique de cet espace.

D.2 Hypothèses sur la densité spectrale du champ

On rappelle que, du fait de son statut de densité spectrale, $S_{\mathbb{X}}$ vérifie, $\forall \omega \in \mathbb{R}^d$:

$$. S_{\mathbb{X}}(\omega) = S_{\mathbb{X}}^*(\omega) \text{ (symétrie hermitienne)}$$

$$. \forall u \in \mathbb{C}^n, (S_{\mathbb{X}}(\omega)u, u)_n \geq 0 \text{ (positivité)}$$

$$. S_{\mathbb{X}}(-\omega) = \overline{S_{\mathbb{X}}(\omega)}$$

où $(\cdot, \cdot)_n$ est le produit scalaire euclidien canonique de \mathbb{C}^n , tel que, $\forall (u, v) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : (u, v)_n = \langle u, \overline{v} \rangle_n$.

On suppose que $S_{\mathbb{X}}$ satisfait, en outre, les hypothèses suivantes :

. Elle est à support compact $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \times \dots \times \overline{\Omega}_d$, avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $\overline{\Omega}_j = [-\Omega_j, \Omega_j] \subset \mathbb{R}$, $\Omega_j \in \mathbb{R}_+^*$.

. $\forall \omega \in \overline{\Omega}$, $S_{\mathbb{X}}(\omega)$ est de rang plein (i.e. $\text{rang } S_{\mathbb{X}}(\omega) = n$), donc est définie positive. Par conséquent, $\forall u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$, $(S_{\mathbb{X}}(\omega)u, u)_n > 0$ et $(S_{\mathbb{X}}(\omega)u, u)_n = 0 \iff u = 0$.

. Elle est deux fois continuellement différentiable sur $\text{int}(\overline{\Omega}) = \text{int}(\overline{\Omega}_1) \times \dots \times \text{int}(\overline{\Omega}_d)$.

D.3 Factorisation de $S_{\mathbb{X}}(\omega)$

Par hypothèse, $\forall \omega \in \overline{\Omega}$, $S_{\mathbb{X}}(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est définie positive, donc vérifie : $\forall \omega \in \overline{\Omega}$, $\det S_{\mathbb{X}}(\omega) > 0$. Par conséquent, elle admet une factorisation de Cholesky de la forme :

$$S_{\mathbb{X}}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)\mathcal{H}^*(\omega), \omega \in \overline{\Omega} \quad (\text{D.1})$$

où, $\forall \omega \in \overline{\Omega}$, $\mathcal{H}(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ est une matrice triangulaire inférieure. Dans tout ce qui suit, nous supposons cette factorisation réalisée.

D.4 Discrétisation du domaine spectral

On note $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$ le point générique du support spectral $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \times \dots \times \overline{\Omega}_d$; donc, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $\omega_j \in \overline{\Omega}_j$.

Chaque arête $\overline{\Omega}_j = [-\Omega_j, \Omega_j]$, $1 \leq j \leq d$, de ce support est subdivisée en N_j intervalles de même longueur $\Delta\omega_j = \frac{2\Omega_j}{N_j}$, où N_j est une puissance entière de 2 (c.f. Fig.D.1).

Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $k_j \in \{1, \dots, N_j\}$, on pose :

$$\omega_{j,k_j} = -\Omega_j + (k_j - \frac{1}{2})\Delta\omega_j = (2k_j - 1 - N_j)\frac{\Delta\omega_j}{2} \quad (\text{D.2})$$

et on note M_{j,k_j} la k_j -ème maille de $\overline{\Omega}_j$ centrée au point ω_{j,k_j} , donc telle que :

$$M_{j,k_j} = \left[\omega_{j,k_j} - \frac{\Delta\omega_j}{2}, \omega_{j,k_j} + \frac{\Delta\omega_j}{2} \right] \quad (\text{D.3})$$

Cette subdivision de chaque arête définit une subdivision régulière du domaine spectral $\overline{\Omega}$ en $N = N_1 \times \dots \times N_d$ mailles $M_k = M_{1,k_1} \times \dots \times M_{d,k_d}$ de centres $\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d})$, avec $k = (k_1, \dots, k_d)$, $k_j \in \{1, \dots, N_j\}$ et ω_{j,k_j} donné par (D.2).

D.5 Discrétisation du domaine de simulation

On note $t = (t_1, \dots, t_d)$ le point générique du domaine d'indexation, identifié à \mathbb{R}^d . Soit $f_{\max,j}$ la fréquence la plus élevée suivant ω_j dans la mesure spectrale de \mathbb{X} . D'après le théorème de Shannon, il faut alors échantillonner la composante correspondante t_j de t à la fréquence $f_{e,j} = 2f_{\max,j}$, soit, puisque $f_{\max,j} = \frac{\Omega_j}{2\pi}$, $f_{e,j} = \frac{\Omega_j}{\pi}$. D'où le pas d'échantillonnage relatif à t_j :

$$\Delta t_j = \frac{1}{f_{e,j}} = \frac{\pi}{\Omega_j} \quad (\text{D.4})$$

soit, en tenant compte de la relation $\Delta\omega_j = 2\Omega_j/N_j$:

$$\Delta t_j = \frac{2\pi}{N_j \Delta\omega_j} \quad (\text{D.5})$$

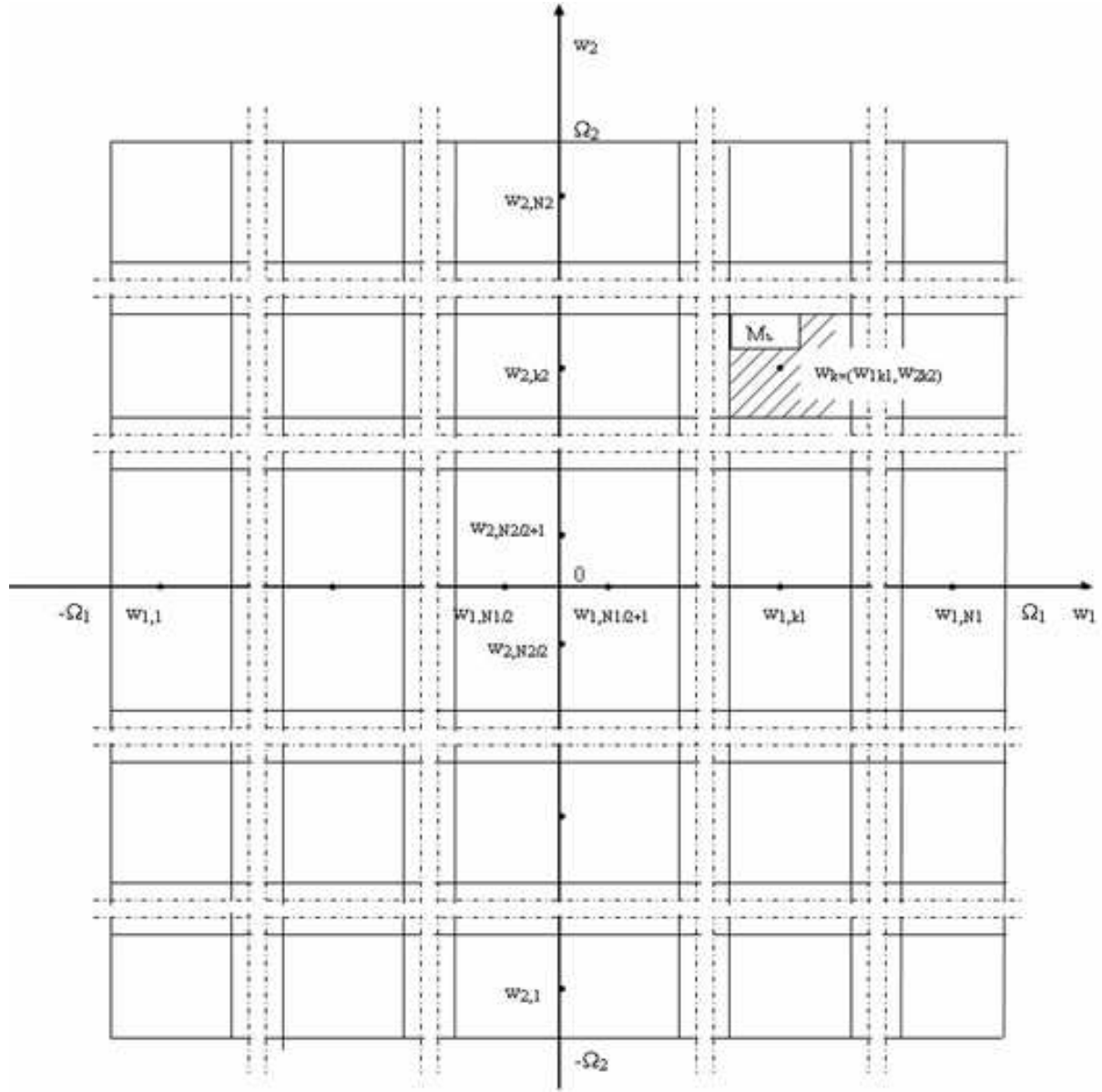


FIG. D.1 – Subdivision du domaine spectral

d'où l'on tire :

$$\Delta\omega_j\Delta t_j = \frac{2\pi}{N_j} \quad (\text{D.6})$$

qui n'est autre que la règle d'échantillonnage de Shannon pour t_j et sa variable duale ω_j .

Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$, on pose :

$$t_{j,m_j} = (m_j - 1)\Delta t_j, \quad m_j \in \{1, \dots, N_j\} \quad (\text{D.7})$$

Les t_{j,m_j} , pour $m_j = 1, \dots, N_j$, sont les points d'échantillonnage de t_j . Ils sont tels que :

$$t_{j,1} = 0, \quad t_{j,N_j} = (N_j - 1)\Delta t_j = T_j - \Delta t_j$$

avec :

$$T_j = N_j \Delta t_j = N_j \frac{\pi}{\Omega_j} \quad (\text{D.8})$$

On définit ainsi d pavés $\bar{T}_1 = [0, T_1], \dots, \bar{T}_d = [0, T_d]$ de \mathbb{R} , dont le produit cartésien $\bar{T} = \bar{T}_1 \times \dots \times \bar{T}_d \subset \mathbb{R}_+^d$ constitue le *domaine de simulation* du champ \mathbb{X} (c.f. Fig.D.2), les points de simulation étant les noeuds t_m de \bar{T} tels que :

$$t_m = (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}), \quad m \in B_N \quad (\text{D.9})$$

où nous avons posé :

$$m = (m_1, \dots, m_d) \quad (\text{D.10})$$

$$B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{1, \dots, N_d\} \quad (\text{D.11})$$

et où, d'après (D.7) :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{1,m_1} = (m_1 - 1)\Delta t_1, \quad m_1 \in \{1, \dots, N_1\} \\ \vdots \\ t_{d,m_d} = (m_d - 1)\Delta t_d, \quad m_d \in \{1, \dots, N_d\} \end{array} \right. \quad (\text{D.12})$$

D.6 Approximation du processus \mathbb{X}

L'algorithme de simulation proposé est basé sur la représentation spectrale de \mathbb{X} . L'étape fondamentale de son élaboration est la construction d'une approximation de l'intégrale définissant la représentation spectrale. Cette approximation est obtenue en discrétisant l'intégrale spectrale à l'aide du découpage du domaine spectral défini ci-dessus. Elle est notée :

$$\mathbb{X}^N = (\mathbb{X}_1^N, \dots, \mathbb{X}_n^N) \quad (\text{D.13})$$

et est telle que, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbb{X}_p^N = (\mathbb{X}_p^N(t), t \in \mathbb{R}^d)$ est un champ aléatoire défini sur $(\mathcal{A}, \Phi, \mathbf{P})$, à valeurs dans \mathbb{R} , indexé sur \mathbb{R}^d , du second ordre, homogène d'ordre deux, centré et qui s'écrit, $\forall t \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{X}_p^N(t) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left\{ \sum_{q \in A_n} \sum_{k \in B_N} \mathcal{H}_{pq}(\omega_k) R_{q,k} e^{2i\pi U_{q,k} + i\langle t, \omega_k \rangle_d} \right\} \quad (\text{D.14})$$

où $\mathcal{H}_{pq}(\omega_k)$ est le terme de rang (p, q) de la matrice $\mathcal{H}(\omega_k)$ et où nous avons posé :

$$N = N_1 \times \dots \times N_d \quad (\text{D.15})$$

$$A_n = \{1, \dots, n\} \quad (\text{D.16})$$

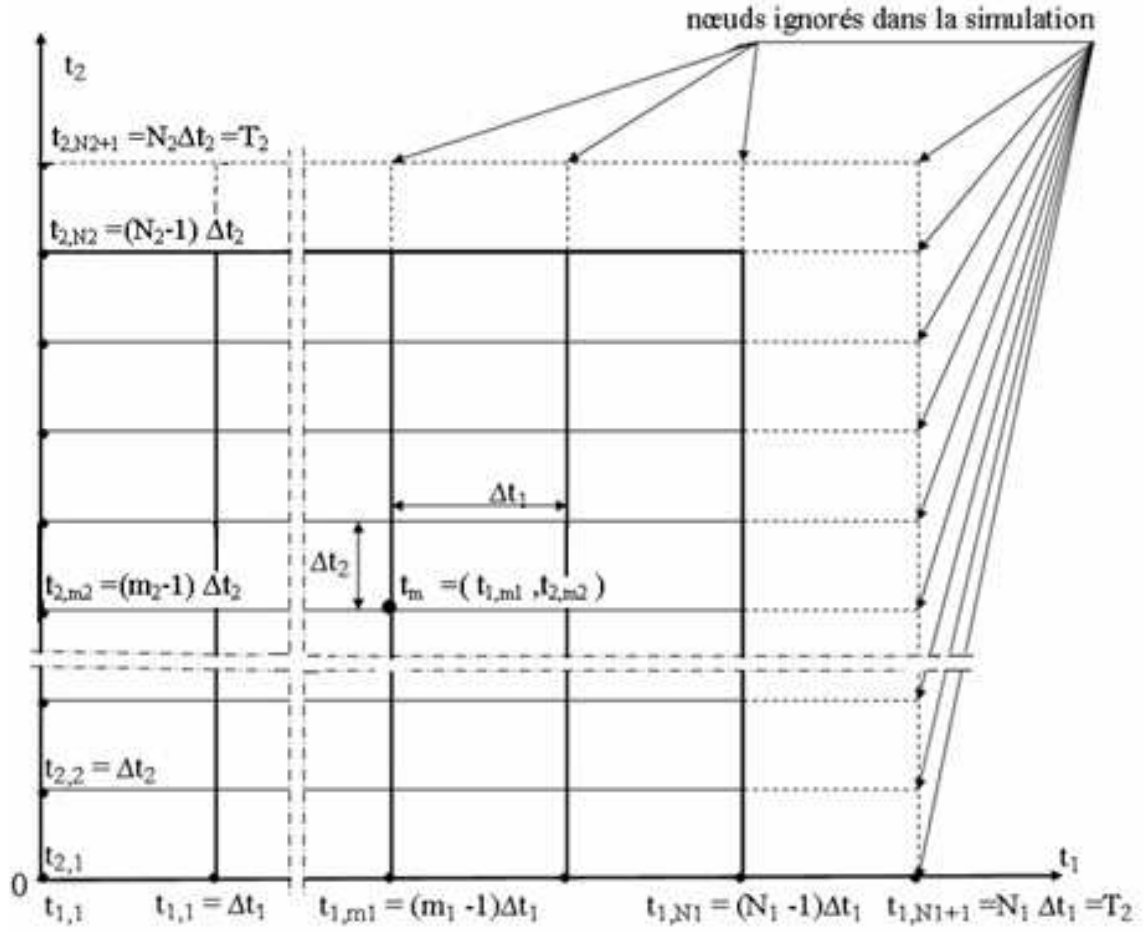


FIG. D.2 – Subdivision du domaine de simulation

$$B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{1, \dots, N_d\} \quad (D.17)$$

$$k = (k_1, \dots, k_d) \quad (D.18)$$

$$\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}) \quad (D.19)$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 \times \dots \times \Delta\omega_d \quad (D.20)$$

$$\sum_{k \in B_N} = \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_d=1}^{N_d} \quad (D.21)$$

$$\sum_{q \in A_n} = \sum_{q=1}^n \quad (D.22)$$

avec $(U_{q,k}, q \in A_n, k \in B_N)$ une famille de $K = n \times N = n \times N_1 \times \dots \times N_d$ variables aléatoires définies sur (\mathcal{A}, Φ, P) , uniformes sur $[0,1]$, indépendantes dans leur ensemble, et pour $R_{q,k}$ deux variantes possibles :

$$\text{. variante 1 : } R_{q,k} = 1 \quad (\text{D.23})$$

$$\text{. variante 2 : } R_{q,k} = \sqrt{-LnV_{q,k}} \quad (\text{D.24})$$

où $(V_{q,k}, q \in A_n, k \in B_N)$ est une famille de $K = n \times N$ variables aléatoires définies sur (\mathcal{A}, Φ, P) , uniformes sur $[0,1]$, indépendantes dans leur ensemble et indépendantes des variables aléatoires $U_{q,k}$.

D.7 Algorithme de simulation

Il s'obtient en échantillonnant l'approximation \mathbb{X}^N de \mathbb{X} aux noeuds $t_m = (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d})$ du domaine de simulation $\bar{T} = [0, T_1] \times \dots \times [0, T_d]$. D'où, d'après (D.14), et pour tout $p \in A_n$:

$$\mathbb{X}_p^N(t_m) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left\{ \sum_{q \in A_n} \sum_{k \in B_N} H_{pq}(\omega_k) R_{q,k} e^{2i\pi U_{q,k} + i \langle t_m, \omega_k \rangle_d} \right\}, m \in B_N \quad (\text{D.25})$$

Tenant compte de ce que :

$$\langle t_m, \omega_k \rangle_d = \sum_{j=1}^d t_{j,m_j} \omega_{j,k_j}$$

avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$t_{j,m_j} = (m_j - 1)\Delta t_j, \quad \omega_{j,k_j} = (2k_j - 1 - N_j) \frac{\Delta\omega_j}{2}, \quad \Delta t_j \Delta\omega_j = \frac{2\pi}{N_j} \quad (\text{D.26})$$

il vient, tous calculs faits et après réarrangement :

$$\begin{cases} \mathbb{X}_p^N(t_m) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left\{ Y_p^N(m) e^{-i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(N_j-1)}{N_j}} \right\}, m \in B_N \\ Y_p^N(m) = \sum_{k \in B_N} Z_p(k) e^{2i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(k_j-1)}{N_j}}, m \in B_N \\ Z_p(k) = \sum_{q \in A_n} \mathcal{H}_{pq}(\omega_k) R_{q,k} e^{2i\pi U_{q,k}}, k \in B_N \end{cases} \quad (\text{D.27})$$

avec t_m et ω_k donnés par (D.9), (D.19) et (D.26).

L'algorithme de simulation s'en déduit en passant aux réalisations. Soit $a \in \mathcal{A}$ et soit $x_p = (\mathbb{X}_p(t, a), t \in \bar{T})$ la réalisation correspondante sur \bar{T} de la coordonnée \mathbb{X}_p de \mathbb{X} . Cette réalisation est approchée par la réalisation $x_p^N = (\mathbb{X}_p^N(t_m, a), m \in B_N)$ du processus à temps discret $(\mathbb{X}_p^N(t_m), m \in B_N)$ défini par (D.27). D'où l'algorithme :

$$\begin{cases} z_p(k) = \sum_{q \in A_n} H_{pq}(\omega_k) r_{q,k} e^{2i\pi u_{q,k}}, k \in B_N \\ y_p^N(m) = \sum_{k \in B_N} z_p(k) e^{2i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(k_j-1)}{N_j}}, m \in B_N \\ x_p^N(t_m) = \sqrt{2\Delta\omega} \Re \left\{ y_p^N(m) e^{-i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(N_j-1)}{N_j}} \right\}, m \in B_N \end{cases} \quad (\text{D.28})$$

avec :

$$r_{q,k} = \begin{cases} 1 & \text{(variante 1)} \\ \text{ou : } \frac{1}{\sqrt{-\ln v_{q,k}}} & \text{(variante 2)} \end{cases} \quad (\text{D.29})$$

où $(u_{q,k}, q \in A_n, k \in B_N)$ et $(v_{q,k}, q \in A_n, k \in B_N)$ sont deux K-familles indépendantes de réalisations indépendantes d'une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$, avec $K = n \times N = n \times N_1 \times \dots \times N_d$.

Remarque : On observera que, quelle que soit la variante retenue (variante 1 ou 2), les trajectoires $t_j \rightarrow \mathbb{X}^N(t_1, \dots, t_j, \dots, t_d, a)$, $a \in \mathcal{A}$, $j \in \{1, \dots, d\}$, du champ approximant $\mathbb{X}^N = (\mathbb{X}_1^N, \dots, \mathbb{X}_n^N)$ défini par (14) sont des fonctions périodiques, de périodes :

$$\tau_j = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\Delta\omega_j} = \frac{4\pi}{\Delta\omega_j}, \quad j \in \{1, \dots, d\} \quad (\text{D.30})$$

soit, puisque, d'après (6), $\Delta\omega_j = \frac{2\pi}{N_j\Delta t_j} = \frac{2\pi}{T_j}$:

$$\tau_j = 2T_j, \quad j \in \{1, \dots, d\} \quad (\text{D.31})$$

Par suite, posant $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d$, la trajectoire $t \rightarrow \mathbb{X}^N(t, a)$, $a \in \mathcal{A}$, du champ \mathbb{X}^N est périodique, de période τ sur \mathbb{R}^d .

D.8 Cas d'un champ vectoriel complexe

Supposons que le champ à simuler $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t), t \in \mathbb{R}^d)$ soit à valeurs dans \mathbb{C}^n et non dans \mathbb{R}^n . Autrement dit, supposons ce champ défini sur $(\mathcal{A}, \Phi, \mathbf{P})$, indexé sur \mathbb{R}^d , gaussien, homogène, centré, continu en m.o.d., de densité spectrale $S_{\mathbb{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : \omega \rightarrow S_{\mathbb{X}}(\omega)$ à support compact $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$, et tel que :

$$\mathbb{X} = \mathbb{X}^R + i\mathbb{X}^I \quad (\text{D.32})$$

où $\mathbb{X}^R = (\mathbb{X}^R(t), t \in \mathbb{R}^d)$ et $\mathbb{X}^I = (\mathbb{X}^I(t), t \in \mathbb{R}^d)$ sont deux champs aléatoires définis sur $(\mathcal{A}, \Phi, \mathbf{P})$, indexés sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans \mathbb{R}^n , gaussiens, homogènes, centrés, continus en m.o.d., de densités spectrales portées par $\overline{\Omega}$, et tels que :

$$\mathbb{X}^R = \Pi_1 \mathbf{X} \quad (\text{D.33})$$

$$\mathbb{X}^I = \Pi_2 \mathbf{X} \quad (\text{D.34})$$

où Π_1 est le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur son premier espace facteur, Π_2 le projecteur orthogonal de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sur son second espace facteur et $\mathbf{X} = (\mathbf{X}(t), t \in \mathbb{R}^d)$ est un champ aléatoire défini sur $(\mathcal{A}, \Phi, \mathbf{P})$, indexé sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$, gaussien, homogène, centré, continu en m.o.d. et tel que :

$$\mathbf{X} = (\mathbb{X}^R, \mathbb{X}^I) \quad (\text{D.35})$$

ce champ étant complètement caractérisé par sa densité spectrale $S_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{2n \times 2n} : \omega \rightarrow S_{\mathbf{X}}(\omega)$ portée par $\overline{\Omega}$ et de la forme, $\forall \omega \in \mathbb{R}^d$:

$$S_{\mathbf{X}}(\omega) = \begin{bmatrix} S_{\mathbb{X}^R}(\omega) & S_{\mathbb{X}^R \mathbb{X}^I}(\omega) \\ S_{\mathbb{X}^I \mathbb{X}^R}(\omega) & S_{\mathbb{X}^I}(\omega) \end{bmatrix} \quad (\text{D.36})$$

avec $S_{\mathbb{X}^R}$ la densité spectrale de \mathbb{X}^R , $S_{\mathbb{X}^I}$ celle de \mathbb{X}^I , $S_{\mathbb{X}^R\mathbb{X}^I}$ la densité interspectrale de \mathbb{X}^R et \mathbb{X}^I , et $S_{\mathbb{X}^I\mathbb{X}^R}$ celle de \mathbb{X}^I et \mathbb{X}^R , ces quatre densités étant portées par $\overline{\Omega}$ et vérifiant :

$$\begin{cases} S_{\mathbb{X}^R}(\omega) = S_{\mathbb{X}^R}^*(\omega) \\ S_{\mathbb{X}^I}(\omega) = S_{\mathbb{X}^I}^*(\omega) \\ S_{\mathbb{X}^R\mathbb{X}^I}(\omega) = S_{\mathbb{X}^I\mathbb{X}^R}^*(\omega) \\ S_{\mathbb{X}^I\mathbb{X}^R}(\omega) = S_{\mathbb{X}^R\mathbb{X}^I}^*(\omega) \end{cases} \quad (\text{D.37})$$

$$\begin{cases} S_{\mathbb{X}^R}(-\omega) = \overline{S_{\mathbb{X}^R}(\omega)} \\ S_{\mathbb{X}^I}(-\omega) = \overline{S_{\mathbb{X}^I}(\omega)} \\ S_{\mathbb{X}^R\mathbb{X}^I}(-\omega) = \overline{S_{\mathbb{X}^R\mathbb{X}^I}(\omega)} \\ S_{\mathbb{X}^I\mathbb{X}^R}(-\omega) = \overline{S_{\mathbb{X}^I\mathbb{X}^R}(\omega)} \end{cases} \quad (\text{D.38})$$

Ainsi, la donnée de \mathbb{X} équivaut à celle de \mathbf{X} et par conséquent, simuler \mathbb{X} revient à simuler \mathbf{X} , ce que nous savons faire d'après ce qui précède.

Annexe E

Formules numériques pour l'estimation de la moyenne, de la fonction d'autocorrélation et de la densité spectrale de puissance d'un champ aléatoire vectoriel du second ordre, homogène d'ordre deux

E.1 Hypothèses, notations

Soient (\mathcal{A}, Φ, P) un espace de probabilité, d, n, L des entiers ≥ 1 , $\mathcal{L} = \{1, \dots, L\}$ une famille finie ordonnée d'indices de cardinal $|\mathcal{L}| = L$ et $(\mathbb{X}^{(l)}, l \in \mathcal{L})$ une L -famille de copies indépendantes $\mathbb{X}^{(l)}$ d'un champ aléatoire $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t), t \in \mathbb{R}^d)$ défini sur (\mathcal{A}, Φ, P) , indexé sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans \mathbb{R}^n , du second ordre, continu et homogène du second ordre, ergodique.

On note $\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n$ les coordonnées canoniques de \mathbb{X} , $\mathbb{X}_1^{(l)}, \dots, \mathbb{X}_n^{(l)}$ celles de sa l -ième copie $\mathbb{X}^{(l)}$ ($l \in \mathcal{L}$) et t_1, \dots, t_d celles du paramètre vectoriel d'indexation $t \in \mathbb{R}^d : \mathbb{X} = (\mathbb{X}_1, \dots, \mathbb{X}_n)$, $\mathbb{X}^{(l)} = (\mathbb{X}_1^{(l)}, \dots, \mathbb{X}_n^{(l)})$, $t = (t_1, \dots, t_d)$.

Soient T_1, \dots, T_d d réels > 0 finis et $\bar{T} = \bar{T}_1 \times \dots \times \bar{T}_d$ le pavé de \mathbb{R}^d tel que, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $\bar{T}_j = [0, T_j]$.

Soient N_1, \dots, N_d d puissances entières de 2 et N l'entier pair tel que $N = N_1 \times \dots \times N_d$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $m_j \in \{1, \dots, N_j\}$, on pose :

$$t_{j,m_j} = (m_j - 1)\Delta t_j, \quad \Delta t_j = \frac{T_j}{N_j} \quad (\text{E.1})$$

et on considère la subdivision $0 = t_{j,1} < t_{j,2} < \dots < t_{j,m_j} < \dots < t_{j,N_j} < t_{j,N_j+1} = T_j$ de l'arête \bar{T}_j de \bar{T} en N_j intervalles :

$$P_{j,m_j} = [t_{j,m_j}, t_{j,m_j+1}] \quad (\text{E.2})$$

à intérieurs disjoints, de longueur constante Δt_j . On définit ainsi une subdivision de \bar{T} en $N = N_1 \times \dots \times N_d$ pavés $P_m = P_{1,m_1} \times \dots \times P_{d,m_d}$, $m \in B_N$, avec :

$$m = (m_1, \dots, m_d), \quad B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{1, \dots, N_d\} \quad (\text{E.3})$$

les noeuds de cette subdivision étant les points t_m de \bar{T} tels que :

$$t_m = (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}), m \in B_N \quad (\text{E.4})$$

Pour tout $l \in \mathcal{L}$, on suppose connue une réalisation de la famille des observations du champ $\mathbb{X}^{(l)} = (\mathbb{X}^{(l)}(t), t \in \mathbb{R}^d)$ en ces points, c'est-à-dire une réalisation $(\mathbb{X}^{(l)}(t_m, a), m \in B_N), a \in \mathcal{A}$, de la N -famille de v.a. n -vectorielles $(\mathbb{X}^{(l)}(t_m), m \in B_N)$.

E.2 Estimation de la moyenne

On note $\mu = E[\mathbb{X}(t)]$ la moyenne de \mathbb{X} et μ_p sa coordonnée de rang p , telle que $\mu_p = E[\mathbb{X}_p(t)]$, $p \in \{1, \dots, n\}$.

E.2.1 Expression de l'estimateur

L'estimateur de la coordonnée μ_p de μ s'écrit, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$:

$$\hat{\mu}_{p,L,T} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\frac{1}{T} \int_{\bar{T}} \mathbb{X}_p^{(l)}(t) dt \right] \quad (\text{E.5})$$

avec :

$$T = T_1 \times \dots \times T_d, \bar{T} = [0, T_1] \times \dots \times [0, T_d], t = (t_1, \dots, t_d), dt = dt_1 \dots dt_d \quad (\text{E.6})$$

E.2.2 Formule numérique pour le calcul d'une estimée

Elle s'écrit, pour $a \in \mathcal{A}$ et $\forall p \in \{1, \dots, n\}$:

$$\hat{\mu}_{p,L,T}(a) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\frac{1}{N} \sum_{m \in B_N} \mathbb{X}^{(l)}(t_m, a) \right] \quad (\text{E.7})$$

soit encore, en explicitant :

$$\hat{\mu}_{p,L,T}(a) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\frac{1}{N_1 \times \dots \times N_d} \sum_{m_1=1}^{N_1} \dots \sum_{m_d=1}^{N_d} \mathbb{X}^{(l)}(t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}, a) \right] \quad (\text{E.8})$$

avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$t_{j,m_j} = (m_j - 1)\Delta t_j, \Delta t_j = \frac{T_j}{N_j} \quad (\text{E.9})$$

Dans tout ce qui suit, le champ \mathbb{X} est supposé centré (i.e. $\mu = 0$).

E.3 Estimation de la fonction d'autocorrélation

On note $R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : u \rightarrow R(u) = E[\mathbb{X}(t+u)\mathbb{X}^T(t)]$ la fonction d'autocorrélation de \mathbb{X} (centré) et $R_{pq}(u)$ le terme de rang (p, q) de la matrice $R(u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tel que, $\forall u \in \mathbb{R}^d, R_{pq}(u) = E[\mathbb{X}_p(t+u)\mathbb{X}_q(t)]$.

E.3.1 Expression de l'estimateur

On pose, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, $T_{0j} = \frac{1}{2}T_j$ et on considère le pavé de \mathbb{R}^d :

$$\overline{T_0} = [0, T_{01}] \times \dots \times [0, T_{0d}] \quad (\text{E.10})$$

de point générique $u = (u_1, \dots, u_d)$ tel que : $u \in \overline{T_0} \Rightarrow u_j \in [0, T_{0j}]$, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$.
L'estimateur de $R_{pq}(u)$ s'écrit alors, $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\hat{R}_{pq,L,T_0}(u) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\frac{1}{T_0} \int_{\overline{T_0}} \mathbb{X}_p^{(l)}(t+u) \mathbb{X}_q^{(l)}(t) dt \right], u \in \overline{T_0} \quad (\text{E.11})$$

avec :

$$T_0 = T_{01} \times \dots \times T_{0d}, t = (t_1, \dots, t_d), dt = dt_1 \dots dt_d \quad (\text{E.12})$$

E.3.2 Formule numérique pour le calcul d'une estimée

Introduisons les ensembles :

$$\begin{aligned} B_{N/2} &= \left\{1, \dots, \frac{N_1}{2}\right\} \times \dots \times \left\{1, \dots, \frac{N_d}{2}\right\}, \\ B'_{N/2} &= \left\{1, \dots, \frac{N_1}{2} + 1\right\} \times \dots \times \left\{1, \dots, \frac{N_d}{2} + 1\right\} \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

de points génériques respectifs :

$$\begin{aligned} m &= (m_1, \dots, m_d), \\ m' &= (m'_1, \dots, m'_d) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

tels que :

$$\begin{aligned} m \in B_{N/2} &\Rightarrow m_j \in \left\{1, \dots, \frac{N_j}{2}\right\}, \forall j \in \{1, \dots, d\}, \\ m' \in B'_{N/2} &\Rightarrow m'_j \in \left\{1, \dots, \frac{N_j}{2} + 1\right\}, \forall j \in \{1, \dots, d\} \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

et posons :

$$\begin{aligned} t_m &= (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}), \\ u_{m'} &= (u_{1,m'_1}, \dots, u_{d,m'_d}) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

avec :

$$\begin{aligned} t_{j,m_j} &= (m_j - 1)\Delta t_j, m_j \in \left\{1, \dots, \frac{N_j}{2}\right\}, j \in \{1, \dots, d\} \\ u_{j,m'_j} &= (m'_j - 1)\Delta t_j, m'_j \in \left\{1, \dots, \frac{N_j}{2} + 1\right\}, j \in \{1, \dots, d\} \end{aligned} \quad (\text{E.17})$$

En notant, comme habituellement, $N = N_1 \times \dots \times N_d$, on a alors, pour $a \in \mathcal{A}$ et $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\hat{R}_{pq,L,T_0}(u_{m'}, a) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\frac{2^d}{N} \sum_{m \in B_{N/2}} \mathbb{X}_p^{(l)}(t_m + u_{m'}, a) \mathbb{X}_q^{(l)}(t_m, a) \right], m' \in B'_{N/2} \quad (\text{E.18})$$

soit encore, en explicitant :

$$\begin{aligned} \hat{R}_{pq,L,T_0}((m'_1 - 1)\Delta t_1, \dots, (m'_d - 1)\Delta t_d, a) &= \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\frac{2^d}{N_1 \times \dots \times N_d} \sum_{m_1=1}^{N_1/2} \dots \right. \\ &\dots \sum_{m_d=1}^{N_d/2} \mathbb{X}_p^{(l)}((m_1 + m'_1 - 2)\Delta t_1, \dots, (m_d + m'_d - 2)\Delta t_d, a) \mathbb{X}_q((m_1 - 1)\Delta t_1, \dots, (m_d - 1)\Delta t_d, a) \left. \right], \\ m'_1 &\in \left\{ 1, \dots, \frac{N_1}{2} + 1 \right\}, \dots, m'_d \in \left\{ 1, \dots, \frac{N_d}{2} + 1 \right\} \quad (\text{E.19}) \end{aligned}$$

E.4 Estimation de la densité spectrale

On note $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : \omega \rightarrow S(\omega)$ la densité spectrale de \mathbb{X} (centré) et $S_{pq}(\omega)$ le terme de rang (p, q) de la matrice $S(\omega) \in \mathbb{C}^{n \times n}$, tel que, $\forall \omega \in \mathbb{R}^d$:

$$S_{pq}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} R_{pq}(u) e^{-i \langle u, \omega \rangle_d} du \quad (\text{E.20})$$

où :

$$u = (u_1, \dots, u_d), \omega = (\omega_1, \dots, \omega_d), \langle u, \omega \rangle_d = \sum_{j=1}^d u_j \omega_j, du = du_1 \dots du_d$$

E.4.1 Expression de l'estimateur

Soit $W_T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ la fenêtre de Hamming, telle que, $\forall t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}^d$:

$$W_T(t) = \prod_{j=1}^d W_{T_j}(t_j) \quad (\text{E.21})$$

avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}, \forall t_j \in \mathbb{R}$:

$$W_{T_j}(t_j) = \frac{1.5863}{\sqrt{T_j}} \left[0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi t_j}{T_j}\right) \right] \mathbf{1}_{[0, T_j]}(t_j) \quad (\text{E.22})$$

L'estimateur de $S_{pq}(\omega)$ s'écrit alors, $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\hat{S}_{pq,L,T}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\hat{\mathbb{X}}_p^{(l)}(w) \overline{\hat{\mathbb{X}}_q^{(l)}(w)} \right], \omega \in \overline{\Omega} \quad (\text{E.23})$$

avec, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$:

$$\hat{\mathbb{X}}_p^{(l)}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} W_T(t) \mathbb{X}_p^{(l)}(t) e^{-i \langle \omega, t \rangle_d} dt \quad (\text{E.24})$$

E.4.2 Formule numérique pour le calcul d'une estimée

D'après la règle d'échantillonnage de Shannon, au domaine d'observation $\bar{T} = [0, T_1] \times \dots \times [0, T_d]$ est associé le domaine d'échantillonnage spectral $\bar{\Omega} = [-\Omega_1, \Omega_1] \times \dots \times [-\Omega_d, \Omega_d]$, avec $\Omega_1 = \frac{N_1\pi}{T_1}, \dots, \Omega_d = \frac{N_d\pi}{T_d}$, et la subdivision choisie de \bar{T} détermine celle de $\bar{\Omega}$ nécessaire à l'estimation du spectre. Cette subdivision spectrale est constituée de $N = N_1 \times \dots \times N_d$ pavés $M_k, k = (k_1, \dots, k_d) \in B_N$, à intérieurs disjoints, tels que, $\forall k \in B_N$:

$$M_k = M_{1,k_1} \times \dots \times M_{d,k_d} \quad (\text{E.25})$$

avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$M_{j,k_j} = \left[\omega_{j,k_j} - \frac{\Delta\omega_j}{2}, \omega_{j,k_j} + \frac{\Delta\omega_j}{2} \right] \quad (\text{E.26})$$

où ω_{j,k_j} , tel que :

$$\omega_{j,k_j} = -\Omega_j + \left(k_j - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega_j = (2k_j - 1 - N_j)\frac{\Delta\omega_j}{2} \quad (\text{E.27})$$

est le centre de la k_j -ème maille de la j -ème arête $\bar{\Omega}_j = [-\Omega_j, \Omega_j]$ de $\bar{\Omega}$, $\Delta\omega_j$ étant le pas de discrétisation relatif à cette arête, donné par :

$$\Delta\omega_j = \frac{2\Omega_j}{N_j} = \frac{2\pi}{T_j} \quad (\text{E.28})$$

On voit ainsi que, $\forall k \in B_N$, le pavé M_k est centré au point ω_k de $\bar{\Omega}$, tel que :

$$\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}) \quad (\text{E.29})$$

On a alors, pour $a \in \mathcal{A}$ et $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\hat{S}_{pq,L,T}(\omega_k, a) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\hat{x}_p^{(l)}(k, a) \overline{\hat{x}_q^{(l)}(k, a)} \right], k \in B_N \quad (\text{E.30})$$

avec, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$:

$$\hat{x}_p^{(l)}(k, a) = \sum_{m \in B_N} x_p^{(l)}(m, a) e^{-2i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(k_j-1)}{N_j}} \quad (\text{E.31})$$

et, $\forall m \in B_N$:

$$x_p^{(l)}(m, a) = \Delta t W_T(t_m) \mathbb{X}_p^{(l)}(t_m, a) e^{i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(N_j-1)}{N_j}} \quad (\text{E.32})$$

Cette estimée peut encore s'écrire, en explicitant :

$$\hat{S}_{pq,L,T}(\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}, a) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left[\hat{x}_p^{(l)}(k_1, \dots, k_d, a) \overline{\hat{x}_q^{(l)}(k_1, \dots, k_d, a)} \right],$$

$$k_1 \in \{1, \dots, N_1\}, \dots, k_d \in \{1, \dots, N_d\} \quad (\text{E.33})$$

avec, $\forall p \in \{1, \dots, n\}$:

$$\hat{x}_p^{(l)}(k_1, \dots, k_d, a) = \sum_{m_1=1}^{N_1} \dots \sum_{m_d=1}^{N_d} x_p^{(l)}(m_1, \dots, m_d, a) e^{-2i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(k_j-1)}{N_j}} \quad (\text{E.34})$$

où, $\forall m_1 \in \{1, \dots, N_1\}, \dots, \forall m_d \in \{1, \dots, N_d\}$:

$$x_p^{(l)}(m_1, \dots, m_d, a) = \Delta t_1 \times \dots \times \Delta t_d W_T(t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}) \mathbb{X}_p^{(l)}(t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}, a) \times \dots \times e^{i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(N_j-1)}{N_j}} \quad (\text{E.35})$$

et où nous rappelons que, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$t_{j,m_j} = (m_j - 1)\Delta t_j, \quad \omega_{j,k_j} = (2k_j - 1 - N_j) \frac{\Delta \omega_j}{2} \quad (\text{E.36})$$

Observons que pour $q = p$ (i.e. pour les termes diagonaux de $S(\omega)$), l'estimée (33) prend la forme :

$$\hat{S}_{pp,L,T}(\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}, a) = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\hat{x}_p^{(l)}(k_1, \dots, k_d, a)|^2, \quad k_1 \in \{1, \dots, N_1\}, \dots, k_d \in \{1, \dots, N_d\} \quad (\text{E.37})$$

avec $\hat{x}_p^{(l)}(k_1, \dots, k_d, a)$ donné par (E.34).

E.5 Retour sur l'estimation de la fonction d'autocorrélation

L'estimateur de la fonction d'autocorrélation présenté au paragraphe (E.3) est basé sur l'emploi direct des trajectoires du champ aléatoire. Or, l'expérience montre que cet estimateur n'est pas efficace. Nous proposons ici un estimateur plus performant, basé sur la connaissance préalable d'un estimateur de la densité spectrale. La donnée de départ est donc un tel estimateur, par exemple celui présenté au paragraphe (E.4).

E.5.1 Expression de l'estimateur

Il s'écrit, $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\hat{R}_{pq,L,T}(u) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{S}_{pq,L,T}(\omega) e^{i\langle u, \omega \rangle} d\omega \quad (\text{E.38})$$

avec $u = (u_1, \dots, u_d)$, $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d)$, $\langle u, \omega \rangle = \sum_{j=1}^d u_j \omega_j$ et $\hat{S}_{pq,L,T}(\omega)$ donné par (E.23).

E.5.2 Formule numérique pour le calcul d'une estimée

Pour le calcul de (E.38), on utilise :

- un domaine d'intégration $\overline{\Omega}$ de la forme :

$$\overline{\Omega} = [-\Omega_1, \Omega_1] \times \dots \times [-\Omega_d, \Omega_d] \quad (\text{E.39})$$

avec $\Omega_1, \dots, \Omega_d$ des réels >0 à déterminer ;

- une subdivision de $\bar{\Omega}$ en N pavés fermés à intérieurs disjoints $M_k, k \in B_N$, centrés aux points $\omega_k, k \in B_N$, où :

$$N = N_1 \times \cdots \times N_d \quad (\text{E.40})$$

$$B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \cdots \times \{1, \dots, N_d\} \quad (\text{E.41})$$

$$k = (k_1, \dots, k_d) \quad (\text{E.42})$$

$$\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}) \quad (\text{E.43})$$

$$M_k = M_{1,k_1} \times \cdots \times M_{d,k_d} \quad (\text{E.44})$$

avec N_1, \dots, N_d d puissances entières de 2 et, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\omega_{j,k_j} = -\Omega_j + \left(k_j - \frac{1}{2}\right)\Delta\omega_j, \quad \Delta\omega_j = \frac{2\Omega_j}{N_j} \quad (\text{E.45})$$

$$M_{j,k_j} = \left[\omega_{j,k_j} - \frac{\Delta\omega_j}{2}, \omega_{j,k_j} + \frac{\Delta\omega_j}{2}\right] \quad (\text{E.46})$$

Le domaine d'échantillonnage de la variable u est fixé par la règle d'échantillonnage de Shannon. C'est un pavé fermé de \mathbb{R}^d de la forme :

$$\bar{U} = [-U_1, U_1] \times \cdots \times [-U_d, U_d] \quad (\text{E.47})$$

avec U_1, \dots, U_d des réels >0 tels que, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$U_j = \frac{\pi N_j}{2\Omega_j} \quad (\text{E.48})$$

Ce domaine est subdivisé en $N = N_1 \times \cdots \times N_d$ pavés fermés à intérieurs disjoints $P_m = P_{1,m_1} \times \cdots \times P_{d,m_d}$ centrés aux points $u_m = (u_{1,m_1}, \dots, u_{d,m_d})$, $m = (m_1, \dots, m_d) \in B_N$, avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$u_{j,m_j} = -U_j + \left(m_j - \frac{1}{2}\right)\Delta u_j, \quad \Delta u_j = \frac{2U_j}{N_j} = \frac{\pi}{\Omega_j} \quad (\text{E.49})$$

$$P_{j,m_j} = \left[u_{j,m_j} - \frac{\Delta u_j}{2}, u_{j,m_j} + \frac{\Delta u_j}{2}\right] \quad (\text{E.50})$$

Relativement à ces discrétisations, l'évaluation de (E.38) donne, pour $a \in \mathcal{A}$ et $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$\hat{R}_{pq,L,T}(u_m, a) = \Re \left\{ \Delta\omega \sum_{k \in B_N} \hat{S}_{pq,L,T}(\omega_k, a) e^{i \langle u_m, \omega_k \rangle_d} \right\} \quad (\text{E.51})$$

soit, tous calculs faits et après réarrangement :

$$\hat{R}_{pq,L,T}(u_{1,m_1}, \dots, u_{d,m_d}, a) = \Re \left\{ E(m_1, \dots, m_d) \hat{r}_{pq,L,T}(m_1, \dots, m_d, a) \right\} \quad (\text{E.52})$$

avec :

$$E(m_1, \dots, m_d) = \Delta\omega_1 \times \dots \times \Delta\omega_d e^{-i\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^d \frac{(N_j-1)(2m_j-N_j-1)}{N_j}} \quad (\text{E.53})$$

$$\hat{r}_{pq,L,T}(m_1, \dots, m_d, a) = \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_d=1}^{N_d} \hat{s}_{pq,L,T}(k_1, \dots, k_d, a) e^{2i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(m_j-1)(k_j-1)}{N_j}} \quad (\text{E.54})$$

$$\hat{s}_{pq,L,T}(k_1, \dots, k_d, a) = \hat{S}_{pq,L,T}(\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}, a) e^{-i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(N_j-1)(k_j-1)}{N_j}} \quad (\text{E.55})$$

où, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$u_{j,m_j} = (2m_j - 1 - N_j) \frac{\Delta u_j}{2}, \quad m_j \in \{1, \dots, N_j\} \quad (\text{E.56})$$

$$\omega_{j,k_j} = (2k_j - 1 - N_j) \frac{\Delta \omega_j}{2}, \quad k_j \in \{1, \dots, N_j\} \quad (\text{E.57})$$

Annexe F

Calcul par Transformée de Fourier des formules de Kintchine pour les champs aléatoires vectoriels homogènes

F.1 Position du problème

Soient n et d deux entiers > 0 et $\mathbb{X} = (\mathbb{X}(t), t \in \mathbb{R}^d)$ un champ aléatoire indexé sur \mathbb{R}^d , à valeurs dans \mathbb{R}^n , du second ordre, centré, continu et homogène en moyenne d'ordre deux, dont la mesure spectrale admet une densité $S : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^{n \times n} : \omega \rightarrow S(\omega)$ par rapport à la mesure de Lebesgue $d\omega$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$ et dont la fonction d'autocorrélation $R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : t \rightarrow R(t) = E[\mathbb{X}(t)\mathbb{X}^T(0)]$ est intégrable sur \mathbb{R}^d . Sous ces hypothèses, on sait que R et S sont liées par les relations de Kintchine :

$$S(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} R(t) e^{-i\langle \omega, t \rangle_d} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}^d \quad (\text{F.1})$$

$$R(t) = \int_{\mathbb{R}^d} S(\omega) e^{i\langle \omega, t \rangle_d} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}^d \quad (\text{F.2})$$

avec :

$$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d), \quad d\omega = d\omega_1 \dots d\omega_d$$

$$t = (t_1, \dots, t_d), \quad dt = dt_1 \dots dt_d$$

$$\langle \omega, t \rangle_d = \sum_{j=1}^d \omega_j t_j$$

Il s'agit alors de calculer numériquement (F.1) et (F.2) en utilisant un algorithme de transformée de Fourier rapide (TFR).

F.2 Préparation du travail

Dans la perspective de ce calcul numérique, les intégrales (F.1) et (F.2) doivent d'abord être approximées par des intégrales sur des compacts, ce qui est possible ici compte tenu des propriétés de

décroissance à l'infini des fonctions R et S .

Soient ϵ et η des réels > 0 "petits" donnés et soient $\{\Omega_1, \dots, \Omega_d\}$, $\{T_1, \dots, T_d\}$ deux familles de réels > 0 , choisies de telle sorte que les pavés de \mathbb{R}^d :

$$\overline{\Omega} = [-\Omega_1, \Omega_1] \times \dots \times [-\Omega_d, \Omega_d] \quad (\text{F.3})$$

$$\overline{T} = [-T_1, T_1] \times \dots \times [-T_d, T_d] \quad (\text{F.4})$$

vérifient :

$$1 - \frac{\int_{\overline{\Omega}} \sqrt{\text{tr} S(\omega) S^*(\omega)} d\omega}{\int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{\text{tr} S(\omega) S^*(\omega)} d\omega} \leq \epsilon \quad (\text{F.5})$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \setminus \overline{T}, \sqrt{\frac{\text{tr} R(t) R^T(t)}{\text{tr} R(0) R^T(0)}} \leq \eta \quad (\text{F.6})$$

Alors, les intégrales $(2\pi)^{-d} \int_{\overline{T}} R(t) \exp(-i \langle \omega, t \rangle_d) dt$ et $\int_{\overline{\Omega}} S(\omega) \exp(i \langle \omega, t \rangle_d) d\omega$ peuvent être prises pour approximations de $S(\omega)$ et $R(t)$, respectivement. Nous travaillerons désormais avec ces approximations, encore notées $S(\omega)$ et $R(t)$ pour simplifier. D'où les nouvelles intégrales à calculer :

$$S(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\overline{T}} R(t) e^{-i \langle \omega, t \rangle_d} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}^d \quad (\text{F.7})$$

$$R(t) = \int_{\overline{\Omega}} S(\omega) e^{i \langle \omega, t \rangle_d} d\omega, \quad t \in \mathbb{R}^d \quad (\text{F.8})$$

Notons que si la densité spectrale est à support compact Ω_S et si Ω_S est un pavé de \mathbb{R}^d (situation que l'on rencontre quelquefois en pratique), alors il suffira de prendre $\overline{\Omega} = \Omega_S$ et dans ce cas (F.8) sera la valeur exacte de la fonction d'autocorrélation.

F.3 Calcul de la densité spectrale à partir de la fonction d'autocorrélation

On note respectivement $S_{pq}(\omega)$ et $R_{pq}(t)$ les termes de rang (p, q) des matrices $S(\omega)$ et $R(t)$. Il s'agit alors, $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$ et $\forall \omega \in \mathbb{R}^d$, de calculer l'intégrale :

$$S_{pq}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\overline{T}} R_{pq}(t) e^{-i \langle \omega, t \rangle_d} dt \quad (\text{F.9})$$

avec \overline{T} donné par ((F.4)-(F.6)).

F.3.1 Discrétisation du domaine d'intégration

Soient N_1, \dots, N_d d puissances entières de 2 et N l'entier pair tel que $N = N_1 \times \dots \times N_d$. Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $m_j \in \{1, \dots, N_j\}$, on pose :

$$t_{j,m_j} = -T_j + (m_j - \frac{1}{2}) \Delta t_j, \quad \Delta t_j = \frac{2T_j}{N_j} \quad (\text{F.10})$$

et on considère la N_j -partition suivante de l'arête $\bar{T}_j = [-T_j, T_j]$ de \bar{T} :

$$\mathcal{P}_{N_j}(\bar{T}_j) = \{P_{j,1}, \dots, P_{j,m_j}, \dots, P_{j,N_j}\} \quad (\text{F.11})$$

avec P_{j,m_j} le sous-intervalle de \bar{T}_j centré au point t_{j,m_j} , de longueur Δt_j et tel que, $\forall m_j \in \{1, \dots, N_j\}$:

$$P_{j,m_j} = \begin{cases} [t_{j,m_j} - \frac{\Delta t_j}{2}, t_{j,m_j} + \frac{\Delta t_j}{2}] & \text{si } m_j \in \{1, \dots, N_j - 1\} \\ [t_{j,N_j} - \frac{\Delta t_j}{2}, t_{j,N_j} + \frac{\Delta t_j}{2}] & \text{si } m_j = N_j \end{cases} \quad (\text{F.12})$$

On définit ainsi une subdivision régulière de \bar{T} en $N = N_1 \times \dots \times N_d$ pavés $P_{1,m_1} \times \dots \times P_{d,m_d}$ centrés aux points $t_m = (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d})$, $m \in B_N$, avec $m = (m_1, \dots, m_d)$, $B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{1, \dots, N_d\}$ et, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, t_{j,m_j} donné par (F.10).

F.3.2 Discrétisation du domaine fréquentiel

Compte tenu de la règle d'échantillonnage de Shannon, dès que le domaine d'intégration et son maillage sont choisis, le domaine fréquentiel et sa partition d'échantillonnage sont fixés.

Le domaine fréquentiel est le pavé $\bar{\Omega} = [-\Omega_1, \Omega_1] \times \dots \times [-\Omega_d, \Omega_d]$ de \mathbb{R}^d tel que, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\Omega_j = \frac{\pi N_j}{2T_j} \quad (\text{F.13})$$

Sa partition d'échantillonnage est formée de $N = N_1 \times \dots \times N_d$ pavés $M_k = M_{1,k_1} \times \dots \times M_{d,k_d}$, $k \in B_N$, avec $k = (k_1, \dots, k_d)$ et, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$M_{j,k_j} = \begin{cases} [\omega_{j,k_j} - \frac{\Delta \omega_j}{2}, \omega_{j,k_j} + \frac{\Delta \omega_j}{2}] & \text{si } k_j \in \{1, \dots, N_j - 1\} \\ [\omega_{j,N_j} - \frac{\Delta \omega_j}{2}, \omega_{j,N_j} + \frac{\Delta \omega_j}{2}] & \text{si } k_j = N_j \end{cases} \quad (\text{F.14})$$

où :

$$\omega_{j,k_j} = -\Omega_j + \left(k_j - \frac{1}{2}\right)\Delta \omega_j, \quad \Delta \omega_j = \frac{2\Omega_j}{N_j} = \frac{\pi}{T_j} \quad (\text{F.15})$$

chaque pavé M_k ($k \in B_N$) étant centré au point $\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d})$.

F.3.3 Calcul de la densité spectrale

D'après (F.9), $\forall k \in B_N$, la valeur au point ω_k de la densité spectrale S_{pq} est donnée par :

$$S_{pq}(\omega_k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\bar{T}} R_{pq}(t) e^{-i\langle \omega_k, t \rangle_d} dt \quad (\text{F.16})$$

Compte tenu du découpage choisi pour \bar{T} , cette intégrale peut alors être approximée par :

$$S_{pq}^N(\omega_k) = \frac{\Delta t}{(2\pi)^d} \sum_{m \in B_N} R_{pq}(t_m) e^{-i\langle \omega_k, t_m \rangle_d} \quad (\text{F.17})$$

avec $\Delta t = \Delta t_1 \times \dots \times \Delta t_d$ et $\sum_{m \in B_N} = \sum_{m_1=1}^{N_1} \dots \sum_{m_d=1}^{N_d}$.

Or :

$$\langle \omega_k, t_m \rangle_d = \sum_{j=1}^d \omega_{j,k_j} t_{j,m_j}$$

et d'après (F.10) et (F.15), et compte tenu de la relation d'échantillonnage de Shannon :

$$\Delta \omega_j \Delta t_j = \frac{2\pi}{N_j} \quad (\text{F.18})$$

ce produit scalaire s'écrit :

$$\langle \omega_k, t_m \rangle_d = \sum_{j=1}^d \left(\frac{2\pi(k_j - 1)(m_j - 1)}{N_j} - \frac{\pi(N_j - 1)(m_j - 1)}{N_j} - \frac{\pi(N_j - 1)(2k_j - N_j - 1)}{2N_j} \right)$$

Portant cette expression dans (F.17), et après réarrangement, on obtient alors, $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$S_{pq}^N(\omega_k) = D(k) s_{pq}(k), \quad k \in B_N \quad (\text{F.19})$$

avec, $\forall k \in B_N$:

$$D(k) = \frac{\Delta t}{(2\pi)^d} e^{i \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^d \frac{(N_j - 1)(2k_j - N_j - 1)}{N_j}} \quad (\text{F.20})$$

$$s_{pq}(k) = \sum_{m \in B_N} r_{pq}(m) e^{-2i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(k_j - 1)(m_j - 1)}{N_j}} \quad (\text{F.21})$$

et, $\forall m \in B_N$:

$$r_{pq}(m) = R_{pq}(t_m) e^{i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(N_j - 1)(m_j - 1)}{N_j}} \quad (\text{F.22})$$

où nous rappelons les notations utilisées :

$$\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}), \quad k = (k_1, \dots, k_d) \quad (\text{F.23})$$

$$t_m = (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}), \quad m = (m_1, \dots, m_d) \quad (\text{F.24})$$

$$B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{1, \dots, N_d\} \quad (\text{F.25})$$

$$\sum_{m \in B_N} = \sum_{m_1=1}^{N_1} \dots \sum_{m_d=1}^{N_d} \quad (\text{F.26})$$

avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$\omega_{j,k_j} = -\Omega_j + \left(k_j - \frac{1}{2}\right) \Delta \omega_j = (2k_j - 1 - N_j) \frac{\Delta \omega_j}{2} \quad (\text{F.27})$$

$$t_{j,m_j} = -T_j + \left(m_j - \frac{1}{2}\right) \Delta t_j = (2m_j - 1 - N_j) \frac{\Delta t_j}{2} \quad (\text{F.28})$$

$$\Delta \omega_j = \frac{2\Omega_j}{N_j} = \frac{\pi}{T_j} \quad (\text{F.29})$$

$$\Delta t_j = \frac{2T_j}{N_j} \quad (\text{F.30})$$

$$\Delta t = \Delta t_1 \times \cdots \times \Delta t_d = \frac{2^d T}{N} \quad (\text{F.31})$$

$$T = T_1 \times \cdots \times T_d \quad (\text{F.32})$$

$$N = N_1 \times \cdots \times N_d \quad (\text{F.33})$$

Remarque : On sait que les termes diagonaux de la densité spectrale sont des fonctions réelles. Afin d'éviter la présence d'une partie imaginaire factice dans (F.19) pour $p = q$, due à d'éventuels résidus numériques, il est alors préférable de remplacer cette relation par :

$$S_{pq}^N(\omega_k) = \begin{cases} \Re(D(k)s_{pp}(k)) & \text{si } q = p \\ D(k)s_{pq}(k) & \text{si } q \neq p \end{cases} \quad (\text{F.34})$$

Observons par ailleurs que l'expression (F.21) a la forme standard requise pour pouvoir être calculée à l'aide d'un algorithme de TFR.

F.4 Calcul de la fonction d'autocorrélation à partir de la densité spectrale

Il s'agit cette fois de calculer, $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$ et $\forall t \in \mathbb{R}^d$:

$$R_{pq}(t) = \int_{\bar{\Omega}} S_{pq}(\omega) e^{i\langle \omega, t \rangle} d\omega \quad (\text{F.35})$$

avec $\bar{\Omega}$ donné par ((F.3)-(F.5)).

F.4.1 Discrétisation du domaine d'intégration $\bar{\Omega}$

Soient N_1, \dots, N_d d puissances entières de 2 et N l'entier pair tel que $N = N_1 \times \cdots \times N_d$. Pour tout $j \in \{1, \dots, d\}$ et tout $k_j \in \{1, \dots, N_j\}$, on pose :

$$\omega_{j,k_j} = -\Omega_j + \left(k_j - \frac{1}{2}\right) \Delta \omega_j, \quad \Delta \omega_j = \frac{2\Omega_j}{N_j} \quad (\text{F.36})$$

et on considère la N_j -partition suivante de l'arête $\bar{\Omega}_j = [-\Omega_j, \Omega_j]$ de $\bar{\Omega}$:

$$\mathcal{P}_{N_j}(\bar{\Omega}_j) = \{M_{j,1}, \dots, M_{j,k_j}, \dots, M_{j,N_j}\}$$

avec M_{j,k_j} le sous-intervalle de $\bar{\Omega}_j$ centré au point ω_{j,k_j} , de longueur $\Delta\omega_j$ et tel que, $\forall k_j \in \{1, \dots, N_j\}$:

$$M_{j,k_j} = \begin{cases} \left[\omega_{j,k_j} - \frac{\Delta\omega_j}{2}, \omega_{j,k_j} + \frac{\Delta\omega_j}{2} \right] & \text{si } k_j \in \{1, \dots, N_j - 1\} \\ \left[\omega_{j,N_j} - \frac{\Delta\omega_j}{2}, \omega_{j,N_j} + \frac{\Delta\omega_j}{2} \right] & \text{si } k_j = N_j \end{cases} \quad (\text{F.37})$$

On définit ainsi une subdivision régulière de $\bar{\Omega}$ en $N = N_1 \times \dots \times N_d$ pavés $M_k = M_{1,k_1} \times \dots \times M_{d,k_d}$ centrés aux points $\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d})$, $k \in B_N$, avec $k = (k_1, \dots, k_d)$, $B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{1, \dots, N_d\}$ et, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$, ω_{j,k_j} donné par (F.36).

F.4.2 Discrétisation du domaine temporel

Compte tenu de la règle d'échantillonnage de Shannon, la donnée du domaine d'intégration et de son maillage fixe le domaine temporel et sa partition d'échantillonnage.

Le domaine temporel est le pavé $\bar{T} = [-T_1, T_1] \times \dots \times [-T_d, T_d]$ de \mathbb{R}^d tel que, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$T_j = \frac{\pi N_j}{2\Omega_j} \quad (\text{F.38})$$

Sa partition d'échantillonnage est formée de $N = N_1 \times \dots \times N_d$ pavés $P_m = P_{1,m_1} \times \dots \times P_{d,m_d}$, $m \in B_N$, avec $m = (m_1, \dots, m_d)$ et, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$P_{j,m_j} = \begin{cases} \left[t_{j,m_j} - \frac{\Delta t_j}{2}, t_{j,m_j} + \frac{\Delta t_j}{2} \right] & \text{si } m_j \in \{1, \dots, N_j - 1\} \\ \left[t_{j,N_j} - \frac{\Delta t_j}{2}, t_{j,N_j} + \frac{\Delta t_j}{2} \right] & \text{si } m_j = N_j \end{cases} \quad (\text{F.39})$$

où :

$$t_{j,m_j} = -T_j + \left(m_j - \frac{1}{2}\right)\Delta t_j, \quad \Delta t_j = \frac{2T_j}{N_j} = \frac{\pi}{\Omega_j} \quad (\text{F.40})$$

chaque pavé P_m ($m \in B_N$) étant centré au point $t_m = (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d})$.

F.4.3 Calcul de la fonction d'autocorrélation

D'après (F.35), $\forall m \in B_N$, la valeur au point t_m de la fonction d'autocorrélation R_{pq} est donnée par :

$$R_{pq}(t_m) = \int_{\bar{\Omega}} S_{pq}(\omega) e^{i\langle \omega, t_m \rangle_d} d\omega \quad (\text{F.41})$$

Compte tenu du maillage choisi pour $\bar{\Omega}$, cette intégrale peut alors être approximée par :

$$R_{pq}^N(t_m) = \Delta\omega \sum_{k \in B_N} S_{pq}(\omega_k) e^{i\langle \omega_k, t_m \rangle_d} \quad (\text{F.42})$$

avec $\Delta\omega = \Delta\omega_1 \times \dots \times \Delta\omega_d$ et $\sum_{k \in B_N} = \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_d=1}^{N_d}$

Or :

$$\langle \omega_k, t_m \rangle_d = \sum_{j=1}^d \omega_{j,k_j} t_{j,m_j}$$

soit, d'après (F.36) et (F.40), et compte tenu de la relation d'échantillonnage (F.18) :

$$\langle \omega_k, t_m \rangle_d = \sum_{j=1}^d \left(\frac{2\pi(k_j - 1)(m_j - 1)}{N_j} - \frac{\pi(N_j - 1)(k_j - 1)}{N_j} - \frac{\pi(N_j - 1)(2m_j - N_j - 1)}{2N_j} \right)$$

Portant cette expression dans (F.42), et après réarrangement, il vient, $\forall (p, q) \in \{1, \dots, n\}^2$:

$$R_{pq}^N(t_m) = E(m)r_{pq}(m) , \quad m \in B_N \quad (\text{F.43})$$

avec, $\forall m \in B_N$:

$$E(m) = \Delta\omega e^{-i\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^d \frac{(N_j - 1)(2m_j - N_j - 1)}{N_j}} \quad (\text{F.44})$$

$$r_{pq}(m) = \sum_{k \in B_N} s_{pq}(k) e^{2i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(k_j - 1)(m_j - 1)}{N_j}} \quad (\text{F.45})$$

et, $\forall k \in B_N$:

$$s_{pq}(k) = S_{pq}(\omega_k) e^{-i\pi \sum_{j=1}^d \frac{(N_j - 1)(k_j - 1)}{N_j}} \quad (\text{F.46})$$

où nous rappelons les notations utilisées :

$$t_m = (t_{1,m_1}, \dots, t_{d,m_d}) , \quad m = (m_1, \dots, m_d) \quad (\text{F.47})$$

$$\omega_k = (\omega_{1,k_1}, \dots, \omega_{d,k_d}) , \quad k = (k_1, \dots, k_d) \quad (\text{F.48})$$

$$B_N = \{1, \dots, N_1\} \times \dots \times \{1, \dots, N_d\} \quad (\text{F.49})$$

$$\sum_{k \in B_N} = \sum_{k_1=1}^{N_1} \dots \sum_{k_d=1}^{N_d} \quad (\text{F.50})$$

avec, $\forall j \in \{1, \dots, d\}$:

$$t_{j,m_j} = -T_j + \left(m_j - \frac{1}{2}\right) \Delta t_j = (2m_j - 1 - N_j) \frac{\Delta t_j}{2} \quad (\text{F.51})$$

$$\omega_{j,k_j} = -\Omega_j + \left(k_j - \frac{1}{2}\right) \Delta \omega_j = (2k_j - 1 - N_j) \frac{\Delta \omega_j}{2} \quad (\text{F.52})$$

$$\Delta t_j = \frac{2T_j}{N_j} = \frac{\pi}{\Omega_j} \quad (\text{F.53})$$

$$\Delta \omega_j = \frac{2\Omega_j}{N_j} \quad (\text{F.54})$$

$$\Delta\omega = \Delta\omega_1 \times \cdots \times \Delta\omega_d = \frac{2^d\Omega}{N} \quad (\text{F.55})$$

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d \quad (\text{F.56})$$

$$N = N_1 \times \cdots \times N_d \quad (\text{F.57})$$

Remarque : On sait que tous les termes R_{pq} de la fonction d'autocorrélation matricielle R sont à valeurs réelles. Or, d'éventuels résidus numériques peuvent conduire à des approximations à parties imaginaires non nulles. C'est pourquoi il est préférable de remplacer (F.43) par :

$$R_{pq}^N(t_m) = \Re\{E(m)r_{pq}(m)\} \quad (\text{F.58})$$

Observons par ailleurs que (F.45) a la forme standard requise pour pouvoir être calculée à l'aide d'un algorithme de TFR.

Bibliographie

- [1] **P.Corona, G.Latmiral, E.Pasolini, L.Piccioli**- *Use of a reverberating enclosure for measurements of radiated power in the microwave range*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.18, no 2, pp.54-59, May 1976.
- [2] **M.O.Hatfield**- *Shielding effectiveness measurements using mode-stirred chambers : A comparison of two approaches*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.30, no 3, pp.229-238, Aug. 1988.
- [3] **D.A.Hill, M.T.Ma, A.R.Ondrejka, B.F.Riddle, M.L.Crawford, R.T.Johnk**- *Aperture excitation of electrically large, lossy cavities*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.36, no 3, pp.169-177, Aug. 1994.
- [4] **P.Corona, G. Ferrara, M.Migliaccio**- *Reverberating chambers as sources of stochastic electromagnetic fields*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.38, no 1, pp.138, Feb. 1995.
- [5] **P.Bonnet**- *Résolution des équations de Maxwell instationnaires et harmoniques par une technique de Volumes finis. Applications à des problèmes de compatibilité électromagnétique*- Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 1998.
- [6] **U.Carlberg, P.S.Kildal, A.A.Kishk**- *Fast numerical Model of Reverberation Chambers with metal stirrers using moment method and cavity Green's function calculated by Ewald summation*- IEEE AP-S International Symposium, Albuquerque, N.M., July 2006.
- [7] **C.Bruns**- *Three-dimensional simulation and experimental verification of a reverberation chamber*- Thèse de doctorat de l'Université de Zurich, 2005.
- [8] **J.H.Beggs, K.S.Yee**- *Finite-Difference Time-Domain implementation of surface impedance boundary conditions*- IEEE Trans. on antennas and propagation, vol.40, no 1, Jan. 1992.
- [9] **J.Lefèvre, J.V.Hagen, D.Lecoointe, W.Tabbara**- *Coupling of electromagnetic energy to a scatterer inside a cavity : a combined statistical and integral representation approach*- Radio Science, 35(2) : 427-434, March-April 2000.
- [10] **T.H.Lehmann**- *A statistical theory of electromagnetic fields in complex cavities*- Interaction Notes, May 1993.
- [11] **R.Holland, R.H.St.John**- *Statistical em field models in externally illuminated, overmoded cavity*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.43, no 1, pp.56-66, Feb. 2001.
- [12] **R.H.St.John, R.Holland**- *Field-component statistics of externally illuminated overmoded cavities*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.42, no 2, pp.125-134, May. 2000.
- [13] **R.H.St.John, R.Holland**- *Statistical response of em-driven cables inside an overmoded enclosure*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.40, no 4, pp.311-324, Nov. 1998.

- [14] **C.Fiachetti**- *Modèles du champ électromagnétique aléatoire pour le calcul du couplage sur un équipement électronique en chambre réverbérante à brassage de modes et validation expérimentale*- Thèse université de Limoges, Novembre 2002.
- [15] **D.A.Hill**- *Plane wave integral representation for fields in reverberation chambers*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.40, no 3, Aug. 1998.
- [16] **J.G.Kostas, B.Boverie**- *Statistical model for a Mode-Stirred Chamber*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.33, no 4, Nov. 1991.
- [17] **L.R.Arnaut**- *Compound Exponential Distributions for Undermoded Reverberation Chambers*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.44, no 3, Aug. 2002.
- [18] **L.R.Arnaut**- *Evaluation of the NPL Untuned Stadium Reverberation Chamber Using Mechanical And Electronic Stirring Techniques*- NPL Report CEM 11, Center for Electromagnetic Metrology, National Physical Laboratory, August 1998.
- [19] **L.R.Arnaut**- *Limit distributions for imperfect electromagnetic reverberation*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.45, no 2, May 2003.
- [20] **B.Lacaze, C.Mailhes, M.Maubourguet, J.-Y.Tourneret**- *Probabilités et statistique appliquée*- Collection polytech, Cépaduès-Editions.
- [21] **W.Feller**- *On the Kolmogorov-Smirnov limit theorems for empirical Distributions*- Annals of Mathematical Statistics -19-1948-pp177-189.
- [22] **F.J.Jr, Massey**- *A note on the estimation of distribution function by confidence limits* - Annals of Mathematical Statistics -21-1950-pp116-119.
- [23] **F.J.Jr, Massey**- *The Kolmogorov-Smirnov test for goodness of fit*- Journal of the American Statistical Association -253-Mars 1951-pp68-78.
- [24] **Golmard, Mallet, Morice**- *Biostatistique*- Faculté de Médecine Pierre et Marie Curie, Octobre 2007.
- [25] **R.H.Price, H.T.Davis, E.P.Wenass**- *Determination of the statistical distribution of electromagnetic field amplitudes in complex cavities*- Physical Review, 48(6) :4716-4729, December 1993.
- [26] **L.Musso** - *Assessment of Reverberation Chamber testing for automotive applications*- PhD thesis, February 2003.
- [27] **P.-E.Huc**- *Modélisation probabiliste du couplage d'un champ électromagnétique stochastique sur un équipement électronique dans un système multi-cavités*- Thèse université de Toulouse III, Octobre 2004.
- [28] **F.Paladian, K.Kerroum, J.Fontaine**- *Prise en compte de l'influence des brins verticaux d'une ligne aéro-souterraine dans le formalisme des lignes de transmission*- Actes du 8ème colloque international et exposition sur la compatibilité électromagnétique, Lille, Septembre 1996, pp.70-74.
- [29] **D.A.Hill**- *Reciprocity in reverberation chamber measurements*- IEEE Trans. On Electromag. Compat, Vol.45, (1), February, 2003.
- [30] **J.M.Ladbury, K.Goldsmith**- *Reverberation chamber verification procedures, or, how to check if your chamber ain't broke and suggestions on how to fix it if it is*- IEEE International Symposium on EMC, volume 1, pp. 17-22, 2000.
- [31] **Jansson, Bäckström**- *Directivity of Equipment and its effect on testing in Mode-Stirred and Anechoic Chamber*- Proc.of IEEE 1999 Intl.Symp.on EMC, Seattle, WA USA, August 1999, Vol.1, pp.17-22.

- [32] **Freyer, Bäckström**- *Comparison of anechoic and reverberation chamber coupling data as a function of directivity pattern*- Proc.of IEEE 2000.
- [33] **Freyer, Bäckström**- *Comparison of anechoic and reverberation chamber coupling data as a function of directivity pattern -Part II-* Proc.of IEEE 2001.
- [34] **C.Soize**- *Méthodes mathématiques en analyse du signal*- Masson, 1993.
- [35] **D.A.Hill**- *Spatial Correlation Function for fields in a Reverberation Chamber*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.37, no 1, Feb. 1995.
- [36] **S.Lalléchère**- *Modélisations numériques temporelles des CRBM en compatibilité électromagnétique. Contribution aux schémas volumes finis*- Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2006.
- [37] **R.Vernet**- *Approches mixtes théorie/expérimentation pour la modélisation numérique de chambres réverbérantes à brassages de modes*- Thèse de doctorat de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, 2006.
- [38] **L.Musso, V.Berat, F.Canavero, B.Demoulin**- *Etude pour l'utilisation d'une chambre réverbérante dans le domaine industriel automobile*- 11ème Colloque International de Compatibilité Electromagnétique, CEM'02, Grenoble, France, 12-14 mars, 93-96, 2002.
- [39] **F.Petit**- *Modélisation et simulation d'une chambre réverbérante à brassage de modes à l'aide de la méthode des différences finies dans le domaine temporel*- Thèse de doctorat, Université de Marne la Vallée, 2002.
- [40] **L.R.Arnaut**- *Statistics of the Quality factor or a Rectangular Reverberation Chamber*- IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, vol.45, no 1, February 2003.
- [41] **P.Corona, G.Ferrara, M.Migliaccio**- *A spectral approach for the determination of the reverberation chamber quality factor*- IEEE Trans.Electromagn.Compat, vol.40, pp.145-153, May 1998.
- [42] **L.K.Warne, K.S.H.Lee, G.Hudson, W.A.Johnson, R.E.Jorgenson, S.L.Stronach**- *Statistical properties of linear antenna impedance in an Electrically Large Cavity*- IEEE Transactions on antennas and propagation, vol.51, no 5, May 2003.
- [43] **D.A.Hill**- *Electromagnetic theory of Reverberation Chambers*- NIST Technical Note 1506, December 1998.
- [44] **K.S.Oh, J.E.Schutt-Aine**- *An efficient Implementation of Surface Impedance Boundary Conditions for the finite-difference time domain method*- IEEE Transactions on antennas and propagation, vol.43, no 7, July 1995.
- [45] **J.G.Maloney, G.S.Smith**- *The use of surface impedance concepts in the finite-difference time-domain method*, IEEE Transactions on antennas and propagation, vol.40, no 1, January 1992.
- [46] **F.Moglie, A.P.Pastore**- *FDTD Analysis of Plane Wave superposition to simulate susceptibility tests in reverberation Chambers* - IEEE Transactions on electromagnetic compatibility, vol 48, n 1, February 2006.
- [47] **L.N.Trefethen**- *Spectral Method in Matlab*- SIAM.
- [48] **C.Chauvière, J.S.Hesthaven, L.Wilcox**- *Efficient Computation of RCS from Scatterers of Uncertain Shapes* - IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 55, No. 5, May 2007
- [49] **J.P.Boyd**- *Chebyshev and Fourier Spectral Methods Second Edition Revised* - Dover.

- [50] **G.E.Karniadakis, S.J.Sherwin**- *Spectral/hp Element Methods for CFD*- Oxford University Press, 1999.
- [51] **F.Gronwald**- *Method of Moment Analysis of a dipole antenna within a rectangular cavity*- IEEE International Symposium on EMC, Istanbul, Turkey, May 2003.
- [52] **M.J.Park, J.Park, S.Nam**- *Efficient calculation of the Green's function for the rectangular cavity* - IEEE Microwave and Guided Wave letters, Vo.8, n°3, March 1998.
- [53] **D.I.Wu, D.C.Chang**- *A Hybrid representation of the Green's Function in an Overmoded Rectangular cavity*- IEEE Transactions on Microwave theory and Techniques, Vo.36, n°9, September 1988.
- [54] **F.Marliani, A.Ciccolella**- *Computationally Efficient Expressions of the dyadic Green's function for rectangular enclosures*- Progress In Electromagnetics Research, PIERs 31, 195-223, 2001.
- [55] **P.P.Ewald** - *Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale*- Annalen der Physik, vol 64 pp.253-268, 1921.
- [56] **A.Kustepeli**- *Analysis and implementation of the Ewald method for waveguide and cavity structures*- PhD dissertation, Clemson Univ., Clemson, SC, Dec 1999.
- [57] **Abramowitz, M. and Stegun I.A.(eds)**- *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York 1974.
- [58] **A. Borji, S.Safavi-Naeini**- *Fast convergent Green's function in a rectangular enclosure*- IEEE 2003.
- [59] **W.P.Wheless, L.T.Wurtz**- *Introducing undergraduates to the moment method*- IEEE Transactions on Education, Vo.38, n°4, November 1995.
- [60] **C.M.Butler, D.R.Wilton**- *A useful transformation of the free-space Green's function with applications to analyses of wire structures*- IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vo.AP-28, n°1, January 1980.
- [61] **R.F.Harrington**- *Matrix Methods for field problems*- Proceedings of the IEEE, vol 55, n 2, February 1967.
- [62] **W.D.Rawle**- *The Method of moments : a numerical technique for wire antenna design*- High Frequency Electronics, February 2007.
- [63] **Georges Cornet**- *Fascicule Electromagnétisme*.
- [64] **Reverberation chamber test methods**- *IEC draft 61000-4-21 electromagnetic compatibility (EMC)*- Part4 : testing and measurement techniques, section 21, 2000.
- [65] **D.A.Hill**- *Boundary fields in Reverberation Chambers*- IEEE Trans. Electromagn. Compat., vol.47, no 2, pp.281-290, May. 2005.

Publications personnelles

Article publié dans une revue internationale

- 1- **S.Lalléchère, P.Bonnet, S.Girard, F.Diouf, F.Paladian**- *Contribution aux schémas volumes finis et hybrids DF/VF pour des modèles temporels de chambres réverbérantes*- Revue Internationale de Génie Electrique - Papier étendu suite à la conférence NUMELEC'06 Lille, France, 2008.

Conférences invitées dans des colloques internationaux

- 2- **F.Paladian, P.Bonnet, R.Vernet, F.Diouf, S.Girard, S.Lalléchère, M.Fogli**- *Adaptation of deterministic and probabilistic methods to EMC problems. Application to Mode Stirred Reverberation Chambers*- International conference on electromagnetics in advanced applications ICEAA'05, Turin, Italie, 2005.
- 3- **S.Lalléchère, P.Bonnet, S.Girard, F.Diouf, F.Paladian**- *Evaluation of FVTD Dissipation and Time-Domain Hybridization for MSRC Studies*- The 23rd Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, ACES2007, Verona, Italie, Mars 2007.

Communications écrites dans des colloques internationaux

- 4- **F.Diouf, F.Paladian, M.Fogli, P.Bonnet, S.Girard, R.Vernet**- *Probabilistic study of a reverberation chamber electromagnetic fields coupling and plane wave interaction with an electric object*- International 2EMC (Embedded EMC) Symposium, Rouen, France, Septembre 2005.
- 5- **F.Diouf, F.Paladian, M.Fogli, S.Girard**- *Contribution à l'étude de l'immunité de systèmes électroniques en Chambre Réverbérante par une approche stochastique*- CEM'06, 13ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique, Saint Malo, France, Avril 2006.
- 6- **S.Girard, F.Diouf, F.Paladian**- *Correspondance Champ - Puissance en Chambre Réverbérante à Brassage de Modes (CRBM)*- CEM'06, 13ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité Electromagnétique, Saint Malo, France, Avril 2006.
- 7- **S.Girard, F.Diouf, F.Paladian**- *Electric Field-Power relationship in mode stirred reverberation chamber*- EMC Europe, Barcelone, Espagne, 2006.

- 8- **F.Diouf, F.Paladian, M.Fogli, M.Klingler, S.Girard**- *Probabilistic study of the electromagnetic environment generated inside a vehicle*- Workshop IEEE, Paris, France, Juin 2007.
- 9- **F.Diouf, F.Paladian, P.Bonnet, M.Fogli, C.Chauvière**- *Numerical Simulation of a Reverberation Chamber with a Stochastic Collocation Method*- Piers, Prague, Rep. Tchèque, Août 2007.
- 10- **F.Diouf, F.Paladian, P.Bonnet, M.Fogli, C.Chauvière**- *Emission in Reverberation Chamber : Numerical Evaluation of the total radiated power by a dipole with a stochastic collocation method*- EMC Europe Zurich, Munich, Allemagne, Septembre 2007.
- 11- **F.Diouf, S.Lalléchère, F.Paladian, M.Klingler, M.Fogli**- *Etude probabiliste de l'environnement électromagnétique généré dans un véhicule automobile*- Journée URSI, Paris, France, Mai 2008.
- 12- **F.Diouf, P.Bonnet, S.Lalléchère, F.Paladian, M.Fogli, C.Chauvière**- *Modélisation des Chambres Réverbérantes par une méthode de collocation stochastique*- CEM'08, Paris, France, Mai 2008.
- 13- **S.Lalléchère, P.Bonnet, F.Diouf, F.Paladian**- *Simulation hybride en temporel d'une chambre réverbérante*- CEM'08, Paris, France, Mai 2008.
- 14- **F.Diouf, F.Paladian, P.Bonnet, M.Fogli, C.Chauvière**- *Improvement of Reverberation Chamber's Simulation : A Stochastic Collocation Approach*- Piers Cambridge-MIT, Etats-Unis, Juillet 2008.

Résumé

L'utilisation croissante d'appareils électroniques et la multiplicité des sources de perturbation ont conduit à l'étude de nouveaux moyens d'essais permettant d'améliorer la répétitivité des mesures en Compatibilité ElectroMagnétique (CEM), en particulier aux fréquences supérieures au GigaHertz. Dans ce contexte, la Chambre Réverbérante à Brassage de Modes (CRBM) représente un outil attractif, tant au niveau des mesures en immunité qu'en émission. Cependant, de nombreuses questions restent encore ouvertes quant au comportement des CRBM, en présence ou non de l'équipement sous test : les travaux présentés dans ce mémoire ont pour but d'apporter une contribution au volet probabiliste de l'étude du champ électromagnétique en CRBM.

Il est tout d'abord vérifié, à partir de tests statistiques et de mesures expérimentales, la légitimité en CRBM réelle, des différentes hypothèses relatives aux grandeurs électromagnétiques générées en environnement réverbérant " idéal ". Sous cette condition, l'étude d'une ligne de transmission a montré l'influence de la directivité dans la relation entre les champs électriques de calibrage en chambre anéchoïque et en CRBM, pour une valeur identique du courant induit à son extrémité.

Par ailleurs, il importe d'appréhender en quel sens l'environnement en CRBM peut être " comparé " à celui généré à l'intérieur d'enceintes semi-fermées (véhicule automobile) soumis à un champ électromagnétique perturbateur externe. Afin d'apporter des prémices de réponses à cette question, il est présenté une comparaison des paramètres statistiques du champ électromagnétique, caractérisant ces deux types d'environnements.

Enfin, les hypothèses vérifiées en haute fréquence (environnement réverbérant " idéal ", pertes des parois prédominantes), ont conduit au développement d'un modèle probabiliste original consistant à assimiler la CRBM à une cavité dont les parois sont caractérisées par une conductivité aléatoire. La loi de probabilité de cette variable aléatoire est établie à partir de résultats de mesures et d'une formulation validée dans les hautes fréquences. Ce modèle de conductivité est ensuite proposé pour la résolution des équations de Maxwell par une méthode de collocation stochastique. Il est démontré qu'un faible nombre de simulations de la cavité sans brasseur peut se substituer à la modélisation déterministe de la CRBM dans son ensemble, pour l'estimation des moments du premier ordre du champ électrique généré dans le volume utile de la structure. Par ailleurs, l'application de la méthode de collocation stochastique à un formalisme précédemment validé pour l'étude de structures filaires immergées dans une cavité a conduit à une modélisation efficace et réaliste d'un dipôle rayonnant en CRBM.

Mots-Clés :

Chambre Réverbérante à Brassage de Modes (CRBM), Champ électromagnétique aléatoire, Densité de probabilité, Ergodicité, Méthode de collocation stochastique.

Abstract

Increasing use of electronic devices and multiplicity of sources of disturbance led to the study of new test facilities making it possible to improve the repetivity of measurements of Electromagnetic Compatibility (EMC), in particular at frequencies higher than the Gigahertz. In this context, the Reverberation Chamber (RC) represents an attractive tool, as well in immunity measurements as in emission. However, many questions remain still open for the behaviour of the RC, in presence or not of the equipment under test : the purpose of the work presented in this thesis is to contribute a share to the probabilistic shutter of the study of the electromagnetic field in RC.

Starting from statistical tests and experimental measurements, the legitimacy in real RC is verified with the various assumptions relating to the electromagnetic fields generated in "ideal" reverberating environment. Under this condition, the study of a line of transmission showed the influence of directivity in the relation between the electric fields of calibration in Anechoic Chamber (AC) and RC, for an identical value of the current induced at its termination.

In addition, it is important to apprehend in which direction the environment in RC can "be compared" with that generated inside half-closed enclosures (vehicle) subjected to an external disturbing electromagnetic field. In order to bring first steps of answers to this question, it is presented a comparison of the statistical parameters of the electromagnetic field, characterizing these two types of environments.

Lastly, the assumptions checked in high frequency ("ideal" environment reverberating, losses of the prevalent walls), led to the development of an original probabilistic model consisting of assimilating the RC to a cavity whose walls are characterized by a random conductivity. The probabilistic density function of this random variable is established starting from formulation and measurement results validated in the high frequencies. This model of conductivity is then proposed for the resolution of the Maxwell's equations by a stochastic collocation method. It is shown that a low number of simulations of the cavity without stirrer can replace the deterministic modelling of the RC as a whole, for the estimation of the statistical parameters of the electric field generated in the working volume of the structure. In addition, the application of the stochastic collocation method to the formalism previously validated for the study of wires immersed in a cavity led to an effective and realistic modelling of a radiated wire in RC.

Keywords :

Reverberation Chamber (RC), Electromagnetic random field, Probability density function, Ergodicity, Stochastic collocation method.